C.Carathéodory's Problem and Optimal Control 2

青本和彦　(於いて沼津)

平成 27 年 3 月 7 日

1 References

[1] V.G.Boltyanskii, Mathematical Methods of Optimal Control, 1971.

[2] C.Carathéodory, Calculus of Variations and Partial Differential Equations of First Order, Part II, 1935.

[3] I.M.Gelfand and S.V.Fomin, Calculus of Variations, 1963.

[4] M.Giaquinta and G.Modica, Mathematical Analysis, (Foundations of Advanced Techniques for Functions of Several Variables), Birkhäuger, 2012.

[5] K.Iguchi, Theory of equilibrium thermodynamics in the optimal control processes, Part I : Mathematical Formulation, preprint, 2014.

[6] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V.Gamkrelidge and V.G.Mischenko, The Mathematical Theory of Optimal Processes, Interscience, 1962. (以下この文献を [PBGM] として引用する.]

[7] H.J.Pesch and R.Bulirsch, The maximum principle, Bellman's equation and Carathéodory's work, Jour. of Optimal Theory and Appli., 80(1994), No2, 199-225.

[8] 山本義隆, 幾何光学の正準理論, 数学書房, 2014.

2 Carathéodory- Bellman's maximum principle

Definition 1 斉次１次 かつ凸関数である　$h(p),\ p=(p_1,\dots,p_n)\in\mathbf{R}^n$ が与えられているものとする. $h(0)=0$ であるが, さらに $h(p)$ に条件

$$h(p)>0 \quad (p\neq 0) \tag{1}$$

を課す.

一般に内部に原点を含む $\mathbf{R}^n$ の閉凸領域 U は Minkowski 関数 $h(p)$ によって次のように定義される：

$u=(u_1,u_2,\dots,u_n)\in\mathbf{R}^n$ に対して

$$U:=\{u\in\mathbf{R}^n; p\cdot u\le h(p),\ \forall p\in\mathbf{R}^n\} \tag{2}$$

ここで $p\cdot u=\sum_{j=1}^n p_j u_j$.

$g(x)=(g_1(x),\dots,g_n(x))$ を Ω において区分的に C^1 級な n 個の関数とする.

κ は自然な射影

$$\kappa:\mathbf{T}^*(\Omega)\quad\to\Omega$$

を表すことにする.

$\mathbf{T}^*(\Omega)$ 上の Hamiltonian

$$H(x,p)=\sum_{j=1}^n p_j\,g_j(x)+h(x,p)-1 \tag{3}$$

が与えられているとき, $h(x,p)$ $((x,p)\in\mathbf{T}^*(\Omega))$ に付随する領域

$$U_x:=\{u\in\mathbf{R}^n;\ p\cdot u\le h(x,p)\,\forall p\in\mathbf{R}^n\}$$

は一般には x に依存する閉凸領域である.

以下簡単のために $h(x,p),\ U_x$ は x に依らないものとし　単に $h(p),U$ と記す.

(1) に対応する H.E.M. は

$$\frac{dx_j}{dt} = g_j(x) + \frac{\partial h(p)}{\partial p_j}, \tag{4}$$

$$\frac{dp_j}{dt} = -\sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial g_k(x)}{\partial x_k}. \tag{5}$$

(4),(5) の軌道は次の条件を満たすもののみを対象とする：

$$H(x,p) = 0. \tag{6}$$

すなわち p^0 を p の初期ベクトルとすれば

$$h(p) = 1 - \sum_{j=1}^{n} p_j\, g_j(x), \tag{7}$$

$$h(p^0) = 1 - \sum_{j=1}^{n} p_j\, g_j(0). \tag{8}$$

$H(x,p)$ は (4)-(5) の積分であるから条件 (6) は矛盾を来たさない.

$$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n),\ \nu_j = \frac{p_j}{h(p)}$$

は p の方向余弦を定める：

$$h(\nu) = 1. \tag{9}$$

Remark (9) を満たす ν 全体はコンパクトな超曲面 V を与えている. U の境界 ∂U とは双対関係にある：

$$\lambda : V \ni \nu \longrightarrow h_p(\nu) \in \partial U.$$

(7) より

$$\frac{1}{h(p)} = \sum_{j=1}^{n} \nu_j\, g_j(x) + 1 \tag{10}$$

Lemma 2 H.E.M.(4)-(6) は次の微分方程式系と同値である：

$$\frac{dx_j}{dt} = g_j(x) + h_{p_j}(\nu), \tag{11}$$

$$\frac{d\nu_j}{dt} = -\sum_{k=1}^{n} \nu_k \frac{\partial g_k(x)}{\partial x_j}, \tag{12}$$

$$p_j = h(p)\,\nu_j = \frac{\nu_j}{\sum_{k=1}^{n} \nu_k\, g_k(x) + 1}. \tag{13}$$

ここで $h(p)$ は (10) で与えられる.

$\mathbf{T}^*\Omega$ において, $t_0 = 0$ のとき初期条件

$$x^0 = 0, p = p_0\,\nu^0,\ p^0 = h(p^0)\nu^0$$

を満たす (11)-(12) の解軌道 (停留曲線)

$$x_j = \varphi_j(t, \nu^0),\ p_j = \pi_j(t, \nu^0) \tag{14}$$

が存在したものとする. ($|g_j(x)|$ $(1 \le j \le n)$ および t, $(t > 0)$ が十分小ならば常に存在する).

ここで次の仮定をおく：

($\mathcal{C}4$)　写像

$$\Phi : [t_0, t_1] \times V \ni (t, \nu^0) \longrightarrow (t, x) = (t, \varphi(t, \nu^0)) \in [t_0, t_1] \times \Omega$$

は全単射である. Φ, Φ^{-1} は C^1 級写像である.

すなわち t, x を与えたとき (14) によって $\nu^0 \in V$ が, したがって (10) によって $h(p)$ が一意的に求められる. したがって ν_j, p_j が t, x の関数として求められる：

$$\nu_j = \nu_j(t, x), p_j = p_j(t, x). \tag{15}$$

そして

$$H(x, p(t, x)) = 0 \tag{16}$$

が満たされる．

Poincaré-Cartan 型式を O を出発する終点が $B\,(B=(t_1,x^1))$ である軌道 γ_{OB} に制限すれば [I] (15)-(17) により

$$\theta = dt = \sum_{j=1}^{n} p_j\, dx_j \tag{17}$$

であるから

$$t_1 = S(x^1) = \int_{\gamma_{OB}} \sum_{j=1}^{n} p_j\, dx_j.$$

(16) を t に関して逆に解くことができれば x の関数として相関数の表示

$$t = S(x) \tag{18}$$

が得られる．さらに

$$\psi_j(x) = g_j(x) + \left.\frac{\partial h(p)}{\partial p_j}\right]_{p=p(S(x),x)} \tag{19}$$

と定義すれば Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{\psi}$ が得られ，その軌道は上記 H.E.M. の軌道と一致する：

$$\frac{dx_j}{dt} = \psi_j(x) \quad (1 \le j \le n).$$

Lemma 3 Poincaré-Cartan 型式

$$\theta = \sum_{j=1}^{n} p_j\, dx_j - H(x,p)dt = \sum_{j=1}^{n} p_j\, dx_j$$

は Ω において閉型式である．ここで

$$p_j(S(x),x) = S_{x_j}(x),\ H(x,S_x) = 0.$$

Corollary 4 $\mathbf{T}^*(\Omega)$ において $\tilde{\gamma}$ を (O,p^0) を左端とし $B\,(B=(x^1,p^1))$ を右端とする γ_{OB} とホモトープな区分的に C^1 級の任意曲線 (許容曲線) とする. このとき等式

$$\int_{\tilde{\gamma}}\sum_{j=1}^{n}p_j\,dx_j=\int_{\gamma_{OB}}\sum_{j=1}^{n}p_j\,dx_j=S(x)$$

が成り立つ. これを Hilbert の不変積分という.

次に Corollary 4 の帰結として得られる　Carathéodory- Bellman の最大値原理について述べる：

Lemma 5 Ω において $\tilde{\gamma}_{OB}$ を $t=0$ で原点を出発, 時刻 $\tilde{t}_1$ に B に到達する曲線で

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}-g(\tilde{x})\in\partial U \tag{20}$$

を満たすものを許容曲線 (admissible) とする.
任意の許容曲線 $\tilde{\gamma}_{OB}$

$$\tilde{\gamma}=\tilde{x}:[0,\tilde{t}_1]\longrightarrow\Omega,\ \tilde{x}(0)=O,\ \tilde{x}(t_1)=B.$$

に対して, $t\in[0,t_1]$ を任意にとり $\Phi^{-1}(t,\frac{d\tilde{x}}{dt}-g(\tilde{x}))=(t,\tilde{\nu})$ とおく. すなわち

$$\frac{d\tilde{x}_j(t)}{dt}=\ H_{p_j}(\tilde{x}(t),\tilde{p})\quad(1\le j\le n),$$

$\tilde{\nu}(t)=\frac{\tilde{p}}{h(\tilde{p})}\in V$ かつ $H(\tilde{x},\tilde{p})=0$ となるように $\tilde{p}$ をとる.
以上の条件のもとで等式

$$\int_{\tilde{\gamma}}\sum_{j=1}^{n}\tilde{p}_j dx_j=\tilde{t}_1$$

が成り立つ.

Proof. 実際

$$\int_{\tilde{\gamma}_{OB}} \sum_{j=1}^{n} \tilde{p}_j dx_j = \int_0^{\tilde{t}_1} \sum_{j=1}^{n} \tilde{p}_j(t) \frac{d\tilde{x}_j(t)}{dt} dt$$
$$= \int_0^{\tilde{t}_1} \sum_{j=1}^{n} \tilde{p}_j(t) H_{p_j}(\tilde{x}, \tilde{p}(t)) dt$$
$$= \int_0^{\tilde{t}_1} \{H(\tilde{x}(t), \tilde{p}(t)) + 1\} dt$$
$$= \int_0^{\tilde{t}_1} dt = \tilde{t}_1.$$

Theorem 6 任意の許容曲線 $\tilde{\gamma}_{OB}$ に対して不等式

$$\tilde{t}_1 - t_1 \geq 0$$

が成り立つ.

Proof. 実際, 微分型式 $\sum_{j=1}^{n} p_j(S(x), x)\, dx_j$ は閉型式である. 故に

$$\tilde{t}_1 - t_1 = \int_{\tilde{\gamma}_{OB}} \sum_{j=1}^{n} \tilde{p}_j dx_j - \int_{\gamma_{OB}} \sum_{j=1}^{n} p_j(S(x), x) dx_j$$
$$= \int_{\tilde{\gamma}_{OB}} \sum_{j=1}^{n} \tilde{p}_j dx_j - \int_{\tilde{\gamma}_{OB}} \sum_{j=1}^{n} p_j(S(x), x) dx_j$$
$$= \int_{\tilde{\gamma}_{OB}} \sum_{j=1}^{n} (\tilde{p}_j - p_j(S(x), x))\, dx_j$$
$$= \int_0^{\tilde{t}_1} \sum_{j=1}^{n} (\tilde{p}_j - p_j(S(\tilde{x}), \tilde{x}))\, H_{p_j}(\tilde{x}, \tilde{p}) dt \geq 0.$$

最後部の不等式は次の凸性の仮定 $(\mathcal{C}_2) - (\mathcal{C}_3)$ から結論される:

$$0 \leq H(\tilde{x}, p) - H(\tilde{x}, \tilde{p}) - \sum_{j=1}^{n} (p_j - \tilde{p}_j) H_{p_j}(\tilde{x}, \tilde{p})$$
$$= -\sum_{j=1}^{n} (p_j - \tilde{p})_j H_{p_j}(\tilde{x}, \tilde{p}).$$

□

Remark $|g_k(\tilde{x})\,(1 \le k \le n)$ が十分小ならば, 条件 (20) はパラメータ t を取り替えることにより常に達せられる. 実際, 任意の曲線 $\tilde{\gamma}$ に対して

$$v(t) = \rho(t)\,\frac{d\tilde{x}}{dt} - g(\tilde{x}) \in \partial U$$

を満たすように $\rho(t) > 0$ を一意的に決めることができる, さらに

$$v(t) = h_p(\tilde{p})$$

を満たす $\tilde{p} \in V$ が一意的に存在する.

$$s = \int_0^t \frac{1}{\rho(t)}\,dt$$

とおけば $\rho(t)\frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{d\tilde{x}}{ds}$ なる故

$$\frac{d\tilde{x}}{ds} = v(t) + g(\tilde{x}) = H_p(\tilde{x}, \tilde{p}).$$

条件 (20) は何を意味するか？
特に Riemann 計量

$$H(x,p) = \sqrt{\sum_{j,k=1}^{n} g^{jk}(x)\,p_j p_k}$$

の場合には

$$dt = \sqrt{\sum_{j,k=1}^{n} g_{j,k} dx^j\,dx^k}$$

を意味する. すなわち (20) は　軌道が速度 1 で動く条件に他ならない (光円錐).

3 PBGM's maximum principle

Definition 7 $U \subset \mathbf{R}^n$ は原点 O を内部に含むコンパクトな凸領域とする.

$u(t)$ は U に値をもつ C^1 級の関数, すなわち C^1 写像

$$u : [t_0, t_1] \longrightarrow U$$

が与えられているとき, $[t_0, t_1] \times \mathbf{T}^*(\Omega)$ 上に C^1 級関数

$$\tilde{H}(x,p,u) = \sum_{j=1}^{n} p_j\, g_j(x) + \sum_{j=1}^{n} p_j\, u_j(t) - 1 \tag{21}$$

が定義される. これを Pontryagin 関数という. x は状態変数, u はコントロール関数という.

(21) を Hamiltonian とする　H.E.M.　は

$$\frac{dx_j}{dt} = g_j(x) + u_j(t), \tag{22}$$

$$\frac{dp_j}{dt} = -\sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial g_k(x)}{\partial x_j}. \tag{23}$$

Remark　逆に微分方程式系 (22) が Ω と閉凸領域 U との直積 $\Omega \times U$ において与えられたとき, Hamiltonian(21) を定義して H.E.M. (22)-(23) を考察することができる. この立場が "PBGM" の方法である.

Lemma 8　不等式

$$h(p) \geq \sum_{j=1}^{n} p_j u_j \quad (\forall u \in U)$$

が成り立つ. U がコンパクトならば等号が成り立つような $v \in \partial U$ (U の境界) が存在する：$v = (v_1, \ldots, v_n),\ v_j = h_{p_j}(p)$.

すなわち

$$h(p) = \max_{u \in U} p \cdot u.$$

実際, 等式

$$h(p) = \sum_{j=1}^{n} p_j h_{p_j}(p).$$

が成り立っている.

新たに Hamiltonian

$$\begin{aligned} H(x,p) &:= \max_{u\in U} \tilde{H}(x,p,u) \\ &= \sum_{j=1}^{n} p_j\, g_j(x) + h(p). \end{aligned} \tag{24}$$

を定義することができる. $H(x,p)$ は斉次１次な凸関数である.

付随する $H.E.M.$ は (4)-(5) によって定義される. ただしそ軌道はすべて (6) を満たすもののみを考察の対象とする:

$$H(x,p) = 0.$$

Definition 9 Ω における曲線

$$\tilde{\gamma} : [t_0, t_1] \ni t \longrightarrow \tilde{x} = \tilde{\varphi}(t) \in \Omega \tag{25}$$

は出発点 $A = x^0$, 終点はつねに原点 O であるような連続で, 区分的に C^1 級のものに制限する:

$$\tilde{\varphi}(t_0) = x^0,\ \tilde{\varphi}(t_1) = O. \tag{26}$$

さらに $\kappa^{-1}(\tilde{\gamma})$ が微分方程式 (22)-(23) を満たすとき $\tilde{\gamma}$ を許容曲線 (admissible) という.

仮定より

$$H(\tilde{x}, \tilde{p}) = 0$$

であるから

Lemma 10 等式

$$\int_{\kappa^{-1}(\tilde{\gamma})} \sum_{j=1}^{n} p_j\, dx_j = t_1 - t_0$$

が成り立つ.

Definition 11 時刻 t_0 に x^0 を出発し, t_1 に原点 O に到達する許容曲線 $\gamma : x = x(t)$ および $u = u(t)$ が次の条件を満たすとき $\{\gamma, u(t)\}$ は <u>最適である, optimal</u> という：
同一時刻 t_0 を出発し, 時刻 $\tilde{t}_1$ に O に到達する任意の許容曲線 $\tilde{\gamma} : x = \tilde{x}(t) \in \Omega$ および $\tilde{u}(t) \in U$ に対してつねに

$$\tilde{t}_1 \geq t_1.$$

Definition 12

$$\kappa^{-1}(\gamma) : x = \varphi(t), p = \pi(t)$$

が方程式 (4)-(5) の解軌道で, かつ (26) を満たす Ω 内の曲線 γ を停留曲線 (extremal) という.

Lemma 10 と同じく等式

Lemma 13

$$\int_{\kappa^{-1}(\gamma)} \sum_{j=1}^{n} p_j \, dx_j = t_1 - t_0$$

が成り立つ.

以上の前提のもとで次の定理が主張される.

Theorem 14 (PBGM)
$\{\gamma : x = x(t), u(t)\}$ が $A = x^0$ を出発点, O を終点とするひとつの最適曲線とする. このとき
$\forall t \in [t_0, t_1]$ に対して
(i)

$$u(t) \in \partial U$$

(ii) $p(t)$ が存在して

$$\begin{aligned} u_j(t) &= H_{p_j}(x(t), p(t)), \quad (1 \leq j \leq n) \\ H(x(t), p(t)) &= \max_{\tilde{u} \in U} \tilde{H}(x(t), p(t), \tilde{u}) = 0. \end{aligned}$$

4　ひとつの十分条件

最後にV. Boltyanskii による　Theorem 14 の逆について説明する.

$(\mathcal{C}5)$　$g_j(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj}\, x_k$.
ここで α_{kj} は定数.

$(\mathcal{C}6)$　U は原点を内点に含む凸多面体である.
この場合は (22)-(23) は線形微分方程式系である. また (4)-(5) は区分的に線形微分方程式系である.

Theorem 15 (V.Boltyanskii)
$(\mathcal{C}5), (\mathcal{C}6)$ の仮定のもとに　Theorem 14 の逆が言える.
すなわち, Theorem 14 の　結論 (i), (ii) が成り立つならば $\gamma, u(t)$ は最適状態関数およびコントロール関数である.

Remark　V.Boltyanskii の定理は O が必ずしも U の内点ではないときにも言及していてもっと一般な条件で述べてある.

[謝辞] 井口和基氏には変分法と Pontryagin のコントロールの最適化問題とのつながりについて貴重な示唆をいただいた. おかげで変分法における C.Carathéodory-R.E.Bellman の手法および L.S.Pontryagin の最適化への私の理解をより深めることができた.