C.Carathéodory's Problem and Optimal Control 1

青本和彦　(於いて沼津)

平成27 年3 月5 日

1　定式化

C.Carathéodory の最大値原理による最適化曲線の定式化は停留曲線場の存在を前提としている．まず停留曲線場の定義から始める．

$\mathbf{R^n}$ の領域 Ω に対して

$$\mathbf{T}^*(\Omega) \cong \Omega \times \mathbf{R}^n$$

の点 (x,p) $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n), p=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ の Hamilton 関数 $H(x,p)$

$$H(x,p): \mathbf{T}^*(\Omega) \longrightarrow \mathbf{R}$$

が次のように与えられているものとする．

($\mathcal{C}$ 1) $H(x,p)$ は x に関して C^2 級, p に関して連続でかつ区分的に C^1 級である．

Hamiltonian $H(x,p)$ に付随する Hamilton 運動方程式　(略して　H.E.M. と記す) は微分方程式系

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \ \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (1 \le j \le n) \tag{1}$$

によって定義される．

$\mathbf{T}^*(\mathbf{\Omega})$ 上の Poincaré-Cartan 型式

$$\theta = \sum_{j=1}^{n} p_j dx_j - H(x,p)\,dt$$

の外微分 $d\theta$ の陪特性系は (2) で与えられる：

$$dx_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} dt = 0,\ dp_j + \frac{\partial H}{\partial x_j} dt = 0 \quad (1 \leq j \leq n), \tag{2}$$

実際

$$d\theta = \sum_{j=1}^{n} (dp_j + \frac{\partial H}{\partial x_j}\,dt) \wedge (dx_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} dt)$$

が成り立つ.

相関数 $S = S(t,x)$(phase function) に関する Hamilton-Jacobi の偏微分方程式 (略して　H.J.E) は方程式

$$S_t + H(x, S_x) = 0 \quad (S_x = (S_{x_1}, \dots, S_{x_n}) \tag{3}$$

によって定義される.

Lemma 1 $A = (t_0, x^0, p^0), B = (t_1, x^1, p^1)$ を端点とする (2) の軌道 γ_{AB} 上の線積分

$$S_{AB} = \int_{\gamma_{AB}} \theta$$

において A, B のそれぞれの微小変分 $x^0 \to x^0 + dx^0$, $p^0 \to p^0 + dp^0$, $t_0 \to t_0 + dt_0$, $x^1 \to x^1 + dx^1$, $p^1 \to p^1 + dp^1$, $t_1 \to t_1 + dt_1$ に応じて S_{AB} の変分公式

$$dS_{AB} = \sum_{j=1}^{n} \left(p_j^1 dx_j^1 - H(t_1, x^1) dt_1\right) - \sum_{j=1}^{n} \left(p_j^0 dx_j^0 - H(t_0, x^0) dt_0\right)$$

が成り立つ.

Definition 2 Ω 上に与えられた区分的に C^1 級の n 個の関数 $\psi_j(x)$ によって Ω 上のベクトル場

$$\boldsymbol{\psi}=\sum_{j=1}^{n}\psi_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

あるいはその軌道を表す微分方程式系

$$\frac{dx_j}{dt}=\psi_j(x) \quad (1\le j\le n) \tag{4}$$

は次の 2 条件を満たすものとする.

(i) $C=(C_1,C_2,\ldots,C_n)$ を任意定数とする (4) の一般解 $x(t,C)=(x_j(t,C))_{1\le j\le n}$, $t\in[t_0,t_1]$ は Ω を覆っている. t,x $((t,x)\in[t_0,t_1]\times\Omega)$ の関数 $p(t,x)=(p_j(t,x))_{1\le j\le n}$ が存在して $x_j(t,C),p_j(t,x(t,C))$ が (2) の軌道となる.

(ii) 等式

$$\frac{\partial p_j(t,x)}{\partial x_k}=\frac{\partial p_k(t,x)}{\partial x_j}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial p_j(t,x)}{\partial t}=-\frac{\partial H(x,p(t,x))}{\partial x_j} \tag{6}$$

を満たす. このときベクトル場 $\boldsymbol{\psi}$ は停留曲線場 (extremal field) であるという.

Definition 3 $A(t_0,x^0)$ または $B(t_1,x^1)$ が固定されているとき停留曲線場 (方向場)$\boldsymbol{\psi}$ は中心方向場 (central field, distinguished field) という.

Lemma 4 停留曲線場 ψ の下で

$$\theta=\sum_{j=1}^{n}p_j(t,x)dx_j-H(x,p(t,x))dt$$

は Ω において閉 *1* 次型式である.

さて Ω において $A=(t_0,x^0)$ を中心とする中心方向場 $\boldsymbol{\psi}$ が存在するならば, $B=(t,x)$ を変数としてとるとき

$$S_{AB} = S(t,x) = \int_{\gamma_{AB}} \theta$$

とおけば

$$dS(t,x) = \sum_{j=1}^{n} p_j(t,x)dx_j - H(x,p(t,x))dt. \tag{7}$$

すなわち

$$p_j(t,x) = S_{x_j}(t,x), \frac{dx_j}{dt} = H_{p_j}(t,x,S_x) \tag{8}$$

そして $S(t,x)$ は *H.J.E.* を満たす*:*

$$S_t + H(x,S_x) = 0. \tag{9}$$

また $B = (t_1, x^1)$ を中心とする中心方向場 $\boldsymbol{\psi}$ が存在するならば*,* $A = (t_0, x_0)$ を変数としてとるとき

$$S_{AB} = -S(t_0,x^0) = \int_{\gamma_{AB}} \theta$$

とおけば

$$dS(t_0,x^0) = \sum_{j=1}^{n} p_j(t_0,x^0)dx_j^0 - H(x^0,p(t_0,x^0))dt_0, \tag{10}$$

$$p_j(t_0,x^0) = S_{x_j^0}(t_0,x^0), \tag{11}$$

$$S_{t_0} + H(x^0,S_{x^0}) = 0. \tag{12}$$

2　斉次１次の場合

Hamiltonian が斉次 1 次の場合には通常の場合の理論はそのままでは適用できない. 特別な考察が必要である.

以下方向場は中心方向場のみを興味の対象とする.
($\mathcal{C}$ 1) の他にさらに次の仮定をおく.

($\mathcal{C}$ 2)　$H(x, p)$ は

$$H(x, p) = H_0(x, p) - 1$$

と表される. ただし　$H_0(x, p)$ は　p に関して 齐次 1 次 で, かつ 凸関数 (convex function) である. すなわち任意の非負実数 $\lambda \geq 0, \lambda' \geq 0$ に対して不等式

$$H(x, \lambda p + \lambda' p') \leq \lambda H(x, p) + \lambda' H(x, p') \quad (p, p' \in \mathbf{R}^n) \tag{13}$$

を満たす.
以後 (2) は条件

($\mathcal{C}$3)　$H(x, p) = 0$ すなわち $H_0(x, p) = 1$

の下でのみその解を考察する.
($\mathcal{C}$3) の下では Poincaré-Cartan 型式は

$$\theta = \sum_{j=1}^{n} p_j dx_j$$

となり相関数 S は x のみに依存する.

$$S = S(x).$$

H.J.E. は

$$H(x, S_x) = 0$$

で与えられる.
以下簡単のために

$$S(0) = 0 \tag{14}$$

を満たす場合のみを考察する.

Lemma 5 Lemma 1 において, 仮定 $(\mathcal{C}1)-(\mathcal{C}2)$ の下で H.E.M の軌道上の線積分は

$$S_{AB} = t_1 - t_0.$$

で与えられる. さらに $H(x,p)=0$ を満たす故,
　左端が原点のときは $t_0=0, x^0=0$ で $t_1=t>0, x^1=x$, または
　右端固定のときは $t_1=0, x^1=0$ で $t_0=t<0, x^0=x$ とおくならば

$$t = S(x), \tag{15}$$

$$dS(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j dx_j, \tag{16}$$

$$H(x, S_x) = 0. \tag{17}$$

例題 1 $||p|| = \sqrt{p_1^2 + \cdots + p_n^2}$ と記す.
　正正則 (regular positive) な Hamiltonian

$$H(x,p) = H(p) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j p_j + ||p|| - 1 \quad (\alpha = (\alpha_j)_{1\leq j\leq n}\,(\text{定数}))$$

をとる.

$$H(x,p) = 0$$

の場合のみ考察する.
　簡単のために

$$||\alpha|| < 1$$

を仮定する.
　H.E.M. は

$$\frac{dx_j}{dt} = \alpha_j + \frac{p_j}{||p||},\ \frac{dp_j}{dt} = 0,$$
$$H(p) = 0.$$

仮定から $||p|| = ||p^0|| = 1$. $t_0 = 0, x^0 = 0$ ととる.
H.E.M の軌道および相関数 $S(x)$ は

$$x_j = \left(\alpha_j + \frac{p_j^0}{||p^0||}\right) t,\ p_j = p_j^0$$
$$t = S(x) = \frac{||x||^2}{\alpha \cdot x + \sqrt{(\alpha \cdot x)^2 + (1 - ||\alpha||^2)||x||^2}}$$

ここで $\alpha \cdot x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j$.
特に $\alpha = 0$ ならば $t = S(x) = ||x||$.

$$p_j = \frac{x_j}{||x||},\ \psi_j(x) = \frac{x_j}{||x||}.$$

例題 2 $n = 2$ で

$$H(x, p) = p_1 x_2 - p_2 x_1 + ||p|| - 1$$

仮定から $||p|| = ||p^0|| = 1$. $t_0 = 0, x^0 = 0$ ととる.
H.E.M. の方程式は

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + \frac{p_1}{||p||},\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \frac{p_2}{||p||}.$$

H.E.M の軌道は

$$x_1 + ix_2 = (p_1^0 + ip_2^0)te^{-it},\ p_1 + ip_2 = (p_1^0 + ip_2^0)e^{-it}.$$

$t = S(x) = ||x||$.

$$p_j = \frac{x_j}{||x||},\ \psi_1(x) = x_2 + \frac{x_1}{||x||}, \psi_2(x) = -x_1 + \frac{x_2}{||x||}.$$

(Archimedes 渦巻線).

例題 3 $n = 3$ で

$$H(x,p) = p_1x_2 - p_2x_1 + ||p|| - 1$$

をとる.

$t_0 = 0, x^0 = 0$ である H.E.M. の軌道は

$$\begin{aligned}
&x_1 + ix_2 = t(p_1^0 + ip_2^0)e^{-it},\ x_3 = tp_3^0,\\
&p_1 + ip_2 = (p_1^0 + ip_2^0)e^{-it},\ p_3 = p_3^0,\\
&||p|| = ||p^0|| = 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&t = S(x) = ||x||,\\
&\psi_1(x) + i\psi_2(x) = (x_2 - ix_1) + \frac{x_1 + ix_2}{||x||},\\
&\psi_3(x) = \frac{x_3}{||x||}.
\end{aligned}$$

停留曲線の方向場はトルネード (tornado) である.

例題 4 (PBGM[i])

$n = 2$ の場合. $t_0 = 0,\ t_1 > 0$ とおく.

$$H(x,p) = p_1x_2 + |p_2| - 1.$$

H.E.M. 方程式は

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = x_2,\ \frac{dx_2}{dt} = \mathrm{sgn}(p_2),\\
&\frac{dp_1}{dt} = 0,\ \frac{dp_2}{dt} = -p_1.
\end{aligned}$$

左端が $t_0 = 0$, 右端が $t_1 > 0$ とする.

(i) $p_2 > 0$ のとき.

$$\begin{aligned}
&p_1 = p_1^0,\ p_2 = -p_1^0t + p_2^0,\\
&x_2 = t + x_2^0,\ x_1 = \frac{1}{2}t^2 + x_2^0t + x_1^0.
\end{aligned}$$

(i) $p_2 < 0$ のとき.

$$
\begin{aligned}
&p_1 = p_1^0,\ p_2 = -p_1^0 t + p_2^0,\\
&x_2 = -t + x_2^0,\ x_1 = -\frac{1}{2}t^2 + x_2^0 t + x_1^0.
\end{aligned}
$$

$\mathbf{R^2}$ は 2 個の無縁な領域 $\Omega_\pm$ の合併である　:

$$
\mathbf{R}^2 = \Omega_+ \cup \Omega_-.
$$

ここで

$$
\Omega_+ :\quad x_1^0 + \frac{1}{2}(x_2^0)^2 \leq 0\,(x_2 \geq 0)\ \text{または}\ x_1^0 - \frac{1}{2}(x_2^0)^2 < 0\,(x_2 \leq 0),
$$

$$
\Omega_- :\quad x_1^0 + \frac{1}{2}(x_2^0)^2 > 0\,(x_2 \geq 0)\ \text{または}\ x_1^0 - \frac{1}{2}(x_2^0)^2 \geq 0\,(x_2 \leq 0),
$$

Lemma 6 $x^0\,(t_0 = 0)$ を出発して原点に到達する停留曲線は次のいずれかである.

(i) $x^0 \in \Omega_+$ のとき.

$$
\begin{aligned}
&x_2 = t + x_2^0,\ x_1 = \frac{1}{2}t^2 + x_2^0 t + x_1^0 \quad (0 \leq t \leq \tau),\\
&x_2 = -(t-\tau) + x_2',\ x_1 = -\frac{1}{2}(t-\tau)^2 + x_2'(t-\tau) + x_1' \quad (\tau \leq t \leq t_1).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_2' = -x_2^0 + 2\sqrt{\frac{1}{2}(x_2^0)^2 - x_1^0},\ x_1' = -\frac{1}{2}(x_2')^2,\\
&\tau = -x_2^0 + \sqrt{\frac{1}{2}(x_2^0)^2 - x_1^0},\\
&t_1 = -S(x^0) = -x_2^0 + 2\sqrt{\frac{1}{2}(x_2^0)^2 - x_1^0}.
\end{aligned}
$$

(ii) $x^0 \in \Omega_-$ のとき.

$$
\begin{aligned}
&x_2 = -t + x_2^0,\ x_1 = \frac{1}{2}t^2 + x_2^0 t + x_1^0 \quad (0 \leq t \leq \tau),\\
&x_2 = (t-\tau) + x_2^0,\ x_1 = \frac{1}{2}(t-\tau)^2 + x_2^0(t-\tau) + x_1^0 \quad (\tau \leq t \leq t_1).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_2' = x_2^0 + 2\sqrt{\frac{1}{2}(x_2^0)^2 + x_1^0},\ x_1' = \frac{1}{2}(x_2')^2,\\
&\tau = x_2^0 + \sqrt{\frac{1}{2}(x_2^0)^2 + x_1^0},\\
&t_1 = -S(x^0) = x_2^0 + 2\sqrt{\frac{1}{2}(x_2^0)^2 + x_1^0}.
\end{aligned}
$$

Lemma 7

$$S(0) = 0.$$

任意の $t > 0$ に対して領域

$$D_t := \{x^0 \in \mathbf{R}^2; -S(x^0) \le t\}$$

はコンパクト凸集合である.　さらに $\bigcap_{t>0} D_t = \{0\}$

が言える.

例題 5 (PBGM [ii])

$n = 2$ とする.

$$H(x,p) = p_1 x_2 - p_2 x_1 + |p_2| - 1.$$

H.E.M. 方程式は

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = x_2,\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \mathrm{sgn}(p_2),\\
&\frac{dp_1}{dt} = p_2,\ \frac{dp_2}{dt} = -p_1.
\end{aligned}
$$

H.E.M. の軌道は $\varepsilon = \mathrm{sgn}(p_2)$ のとき

$$
\begin{aligned}
&p_1 + ip_2 = (p_1^0 + ip_2^0)e^{-it},\\
&x_1 - \varepsilon + ix_2 = (x_1^0 - \varepsilon + ix_2^0)e^{-it}.
\end{aligned}
$$

$||p^0|| = ||p||.$

[First step]

$O_\varepsilon = (\varepsilon, 0)$ に対して $t_0 = 0$ として $x^1 = 0,\ (t_1 < \pi)$ を満たすとき

$$-1 = (x_1^0 - \varepsilon + ix_2^0)e^{-it}$$

すなわち

$$x_1^0 - \varepsilon + ix_2^0 = -e^{it}$$

x^0 は O_ε を中心とする半径 1 の上 (下) 半円周を動く. 特に $p_1^0 = -1, p_2^0 = 0$ ととるならば x^0 は O_+ を中心とする下半円周 0 を, $p_1^0 = 1, p_2^0 = 0$ ととるならば x^0 は O_- を中心とする上半円周 0 を動く. このような点を

$$\begin{aligned}&(z_1 - \varepsilon)e^{-it} = -1,\\&z_1 = x_1^1 + ix_2^1.\end{aligned}$$

で表す.

[Second step]

新たに停留曲線として終点 $x^1 = z_1$ をとり, 始点 x^0 を

$$(x_1^0 + \varepsilon + ix_2^0)e^{-it} = z_1 + \varepsilon \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

を満たすようにとることができる. 特に $t = \pi$ のとき

$$z_2 + \varepsilon = -(z_1 + \varepsilon)$$

を満たすように z_2 を決める. この操作を繰り返すことにより帰納的に

[$n + 1$th step].

$$\begin{aligned}&(x_1^0 - (-1)^n\varepsilon + ix_2^0)e^{-it} = z_n + \varepsilon \quad (0 \leq t \leq \pi),\\&z_{n+1} - (-1)^n = -(z_n - (-1)^n)\end{aligned}$$

を満たすように $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ を決めることができる.

Proposition 8 ε に符合して 2 個の領域 Ω_+, Ω_- が存在して

$$\mathbf{R}^2 = \Omega_+ \cup \Omega_-.$$

$x^0 \in \Omega^+$ ならば適当な非負整数 n に対して

$$\begin{aligned} t_1 &= -S(x^0) \\ &= \arg(x_1^0 + ix_2^0 - (-1)^n) - \arg(z_n - (-1)^n) \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \big(\arg(z_{k+1} - (-1)^k) - \arg(z_k - (-1)^k)\big) \\ &+ \arg(z_1 - 1) + \pi. \end{aligned} \tag{18}$$

$x^0 \in \Omega^-$ ならば

$$\begin{aligned} t_1 &= -S(x^0) \\ &= \arg(x_1^0 + ix_2^0 + (-1)^n) - \arg(z_n + (-1)^n) \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \big(\arg(z_{k+1} + (-1)^k) - \arg(z_k + (-1)^k)\big) \\ &+ \arg(z_1 + 1). \end{aligned} \tag{19}$$

領域

$$D_t := \{x \in \mathbf{R}^2; -S(x) \le t\} \quad (t > 0)$$

とおくとき

$$\cap_{t>0} D_t = \{0\}$$

が成り立つ.

例題 6 (PBGM[iii])
$n = 2$ で

$$H(x,p) = p_1x_2 - p_2x_1 + |p_1| + |p_2| - 1.$$

H.E.M. は

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + \mathrm{sgn}(p_1),\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \mathrm{sgn}(p_2),$$
$$\frac{dp_1}{dt} = p_2,\ \frac{dp_2}{dt} = -p_1.$$

$O_1 = (1,1), O_2 = (-1,1), O_3 = (-1,-1), O_4 = (1,-1)$ とおくとき H.E.M. の軌道は O_k を中心とする時計回りの回転 (角度は $\frac{\pi}{4}$ 以下) の合成である.

O_1 を中心とする $\frac{1}{4}$ 円

$$\Gamma_1^1 : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 2,\ x_2 \leq 0.$$

は O および $A_1 = (2,0)$ を通る.

O_2 を中心とする A_1 を通る $\frac{1}{4}$ 円

$$\Gamma_2^1 : (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 10$$

のもう一方の端点 $A_2 = (0,4)$ をとる.

O_3 を中心とする A_2 を通る $\frac{1}{4}$ 円

$$\Gamma_3^1 : (x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 26$$

のもう一方の端点 $A_3 = (-6,0)$ をとる.

O_4 を中心とする A_3 を通る $\frac{1}{4}$ 円

$$\Gamma_4^1 : (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 50$$

のもう一方の端点 $A_4 = (0,-8)$ をとる. この操作を繰り返せば

O を出発点とする円弧 $OA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \ldots$ の合併からなる停留曲線が得られる:

$$A_{4n} = (0, -8n), A_{4n+1} = (8n+2, 0), A_{4n+2} = (0, -8n-4),$$
$$A_{4n+3} = (-8n-6, 0),$$
$$\gamma^1 = \Gamma_1^1 + \Gamma_2^1 + \Gamma_3^1 + \Gamma_4^1 + \cdots$$

これを時計の逆回りに直角だけ回転することにより γ_1 を込めて計４個の停留曲線が得られる：

$$\gamma^k = \Gamma_1^k + \Gamma_2^k + \Gamma_3^k + \cdots \quad (2 \le k \le 4).$$

$\mathbf{R}^2 - \cup_{k=1}^4 \gamma_k$ は４個の連結成分からなりそれに境界 γ_k を付け加えた領域を Ω_k とおく．$\mathbf{R}^2$ は Ω_k の素な合併である：

$$\mathbf{R}^2 = \cup_{1 \le k \le 4} \Omega_k.$$

以下 $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ と $z = x_1 + ix_2 \in \mathbf{C}$ とを同一視しても混乱はないであろう.

Proposition 9 Ω_1 の任意の点 x^0 に対して点列 $z_1 \in \Gamma_1,\ z_k \in \Omega_1\,(2 \le k \le n)$ および τ_1, τ_2 が存在して次の条件を満足する*:*

$$z_1 - e^{\frac{i\pi}{4}} = -e^{i\tau_1}\,(0 < \tau_1 \le \frac{\pi}{4}), \tag{20}$$
$$z_{k+1} - e^{\frac{(2k+1)i\pi}{4}} = i(z_k - e^{\frac{(2k+1)i\pi}{4}})\ (1 \le k \le n-1), \tag{21}$$
$$x_1^0 + ix_2^0 - e^{\frac{(2n+1)i\pi}{4}} = e^{i\tau_2}\,(0 \le \tau_2 < \frac{\pi}{4}). \tag{22}$$

このとき

$$t_1 = -S(x^0) = \tau_1 + \tau_2 + \frac{(n-1)\pi}{2}. \tag{23}$$

同様にして $x^0 \in \Omega_k\,(k \ge 2)$ に対して $-i(x_1+ix_2), -(x_1+ix_2), i(x_1+x_2)$ がそれぞれ (17) – (18) を満たすようにできる. そして (20) が成り立つ.

$x \in \Omega_1$ が原点の近傍にあるならば $n = 1$ ととることができる故

$$\begin{aligned} t_1 &= -S(x_0) = \tau_1 + \tau_2 \\ &= \frac{1}{2}\{(x_2^0)^2 + x_1^0 + x_2^0\} + O(||x^0||^3). \end{aligned}$$

故に正数 t が十分小ならば領域

$$D_t := \{x^0 \in \mathbf{R}^2,\ -S(x^0) < t\}$$

に関して

$$\cap_{t>0} D_t = \{0\}$$

が成り立つ.