共形的に不変な超幾何積分に関するいくつかの問題

青本和彦

1　序

$\alpha_j = (\alpha_{j1}, \alpha_{j2})\,(1 \le j \le 3)$ を 3 個の 2 次元実ベクトル, $\alpha_{j0} \in \mathbf{R}$ として $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{C}^2$ の 2 次関数

$$f_j(x) = (x, x) + (\alpha_j, x) + \alpha_{j0}$$

をとする. ただし　$|x|^2 = (x, x) = x_1^2 + x_2^2,\ (\alpha_j, x) = \alpha_{j1}x_1 + \alpha_{j2}x_2$　とおく.

$$\Phi(x) = f_1(x)^{\lambda_1} f_2(x)^{\lambda_2} f_3(x)^{\lambda_3} \quad (\lambda_j \in \mathbf{C})$$

とおき解析的な積分

$$\begin{aligned} J(\varphi) &= \int_\sigma \Phi(x)\varphi(x)\varpi, \\ \varpi &= dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned} \tag{1}$$

を考察する. ここで　$\varphi(x)$ は　(複素) 円周

$$\Gamma_j : f_j(x) = 0$$

を除いた複素領域　$X = \mathbf{C}^2 - \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ で正則な有理関数をとる.

積分 (1) を定式化するには　X 上の有理的なツウィスト de Rham コホモロジー $H^*_\nabla(X, \Omega^\cdot)$ を用いる. すなわち複素領域　$X = \mathbf{C}^2 - \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ で正則な有理微分型式の空間

$$\Omega = \Omega^0 \oplus \Omega^1 \oplus \Omega^2$$

に働くツウィスト外微分

$$\nabla\psi = d\psi + d\log\Phi \wedge \psi$$

に関するコホモロジーである. 特に $R = \Omega^0$ は複素領域 $X = \mathbf{C}^2 - \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ で正則な有理関数の全体である.

いま立体射影

$$\iota : x_j = \frac{\xi_j}{\xi_3 + 1} \quad (1 \le j \le 2),$$
$$\xi_j = \frac{2x_j}{|x|^2 + 1}\ (1 \le j \le 2),\ \xi_3 = \frac{1 - |x|^2}{1 + |x|^2}$$

とおけば $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbf{C}S^2$ ($\mathbf{C}S^2$ は複素 2 次元球面: $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$)

であって複素解析的に同型

$$\iota : \mathbf{C}S^2 - \{\xi_3 + 1 = 0\} \cong \mathbf{C}^2 - \{|x|^2 + 1 = 0\}$$

が得られる.

積分 (1) は合同変換を許すのでその不変量を用いて積分に関する種々の解析的な量を表すことができる.

いま Γ_j は実の円周を表すものと仮定すれば, その中心 O_j は $(-\alpha_{j1}, -\alpha_{j2})$, 半径, 中心間の距離はそれぞれ

$$r_j^2 = |\alpha_j|^2 - \alpha_{j0},$$
$$\rho_{j,k}^2 = |\alpha_j - \alpha_k|^2$$

で与えられる. これらはすべて不変量である. その他に 3 点 O_1, O_2, O_3 を頂点とする 3 角形 $\Delta O_1O_2O_3$ の面積 $|[O_1, O_2, O_3]|$ も不変量で次の関係がある:

$$4|[O_1, O_2, O_3]|^2 = \Delta(\rho_{23}, \rho_{13}, \rho_{12})^2$$
$$= -\rho_{23}^4 - \rho_{13}^4 - \rho_{12}^4 + 2\rho_{12}^2\rho_{13}^2 + 2\rho_{13}^2\rho_{23}^2 + 2\rho_{12}^2\rho_{23}^2$$
$$= -B(0123).$$

Definition 1 $\rho_{j,k}^2$ および r_j^2 を成分とする Cayley-Menger 行列式を次のように定義する：

$$B\begin{pmatrix} 0 & i_1 & \dots & i_p \\ 0 & j_1 & \dots & j_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \rho^2_{i_1,j_1} & \rho^2_{i_1,j_2} & \dots & \rho^2_{i_1,j_p} \\ 1 & \rho^2_{i_2,j_1} & \rho_{i_2,j_2} & \dots & \rho^2_{i_2,j_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \rho^2_{i_p,j_1} & \rho^2_{i_p,j_2} & \dots & \rho^2_{i_p,j_p} \end{vmatrix}.$$

$$B\begin{pmatrix} \star & i_1 & \dots & i_p \\ 0 & j_1 & \dots & j_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & r^2_{j_1} & r^2_{j_2} & \dots & r^2_{j_p} \\ 1 & \rho^2_{i_1,j_1} & \rho^2_{i_1,j_2} & \dots & \rho^2_{i_1,j_p} \\ 1 & \rho^2_{i_2,j_1} & \rho_{i_2,j_2} & \dots & \rho^2_{i_2,j_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \rho^2_{i_p,j_1} & \rho^2_{i_p,j_2} & \dots & \rho^2_{i_p,j_p} \end{vmatrix}.$$

$$B\begin{pmatrix} \star & i_1 & \dots & i_p \\ \star & j_1 & \dots & j_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & r^2_{j_1} & r^2_{j_2} & \dots & r^2_{j_p} \\ r^2_{i_1} & \rho^2_{i_1,j_1} & \rho^2_{i_1,j_2} & \dots & \rho^2_{i_1,j_p} \\ r^2_{i_2} & \rho^2_{i_2,i_1} & \rho^2_{i_2,j_2} & \dots & \rho^2_{i_2,j_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r^2_{i_p} & \rho^2_{i_p,i_1} & \rho^2_{i_p,j_2} & \dots & \rho^2_{i_p,j_p} \end{vmatrix}.$$

$$B\begin{pmatrix} 0 & \star & i_1 & \dots & i_p \\ 0 & \star & j_1 & \dots & j_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & r^2_{j_1} & r^2_{j_2} & \dots & r^2_{j_p} \\ 1 & r^2_{i_1} & \rho^2_{i_1,j_1} & \rho^2_{i_1,j_2} & \dots & \rho^2_{i_1,j_p} \\ 1 & r^2_{i_2} & \rho^2_{i_2,i_1} & \rho^2_{i_2,j_2} & \dots & \rho^2_{i_2,j_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & r^2_{i_p} & \rho^2_{i_p,i_1} & \rho^2_{i_p,j_2} & \dots & \rho^2_{i_p,j_p} \end{vmatrix}.$$

特に $i_\nu = j_\nu$ $(1 \le \nu \le p)$ のときは $B(0i_1 \dots i_p), B(\star i_1 \dots i_p), B(0 \star i_1 \dots i_p)$ などと略記する。

$$\tilde{f}_j(\xi) = \frac{(\xi_3+1)}{2r_j}\, f_j\!\left(\frac{\xi_1}{\xi_3+1}, \frac{\xi_2}{\xi_3+1}\right)$$
$$= u_{j0} + \sum_{\nu=1}^{3} u_{j\nu}\xi_\nu \text{ (線形)},$$
$$u_{j0} = \frac{1+\alpha_{j0}}{2r_j}, u_{j1} = \frac{2\alpha_{j1}}{2r_j},\ u_{j2} = \frac{2\alpha_{j2}}{2r_j},\ u_{j3} = \frac{\alpha_{j0}-1}{2r_j}.$$

ここで $\tilde{f}_j$ は Lorentz 変換に関して不変なように正規化しておく:

$$-u_{j0}^2+\sum_{\nu=1}^{3} u_{j\nu}^2=1$$

さらに

$$\tilde{f}_4(\xi)=\xi_3+1$$

とおく.

Lorentz 内積 $a_{jk}=(\tilde{f}_j,\tilde{f}_k)$ を

$$a_{jk}=-u_{j0}u_{k0}+\sum_{\nu=1}^{3} u_{j\nu}u_{k\nu} \quad (1\leq j,k\leq 4)$$

とおくとき $a_{11}=a_{22}=a_{33}=1, a_{44}=0$. さらに

$$a_{j0}=u_{j0} \quad (1\leq \jmath \leq 4),\, a_{00}=-1$$

とおいて　5×5 の配置行列 $A=(a_{jk})_{0\leq j,k\leq 4}$ を得る.

$i_1,\ldots,i_r$ 行, $j_1,\ldots,j_r$ 列の小行列式を

$A\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ j_1 & \ldots & j_r \end{pmatrix}$ で表す. 積分 (1) に現れるの特異点はすべて主行列式の零点に含まれる:

$$A(i_1,\ldots,i_r)=A\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ i_1 & \ldots & i_r \end{pmatrix}=0$$

Quest 1 $H_{\nabla}^{*}(X,\Omega^{\cdot})$ の構造. $H_{\nabla}^{2}(X,\Omega^{\cdot})$ の基底の選択と隣接する微分型式との関係. 特に $\lambda=(\lambda_j)_{1\leq j\leq 3}$ のずらしに対するホロノミックな差分関係式, 多項式の係数に関するホロノミックな微分関係式 (Gauss-Manin 接続) の導出.

Quest 2 積分領域 (ツウィスト・サイクル) の特定と対応する積分の振る舞い.

Quest 3 退化した場合に現れる発散積分の処理. QED 場の理論 (Feynman 積分) への応用.

Lemma 2

$$A(i,j) = \frac{\Delta^2(r_j, r_k, \rho_{jk})}{r_j^2 r_k^2}$$

ここで

$$\begin{aligned}
&\Delta^2(r_j, r_k, \rho_{jk}) == -B(0 \star jk)\\
&= -r_j^4 - r_k^4 - \rho_{jk}^4 + 2r_j^2 r_k^2 + 2r_j^2\rho_{jk}^2 + 2r_k^2\rho_{jk}^2\\
&= (r_j + r_k + \rho_{jk})(-r_j + r_k + \rho_{jk})(r_j - r_k + \rho_{jk})(r_j + r_k - \rho_{jk})
\end{aligned}$$

$A(j,k) = 0$ となるのは Γ_j, Γ_k が接するときである.

Lemma 3

$4r_1^2 r_2^2 r_3^2\, A(1,2,3) = -\{r_1^4\rho_{23}^2 + \ldots\}$
$+\{r_2^2 r_3^2(\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2) + \ldots\} + \{r_1^2\rho_{23}^2(\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2) + \ldots\} - \rho_{23}^2\rho_{13}^2\rho_{12}^2$

$A(1,2,3) = 0$ となるのは $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ が共有点をもつときである.
また

$$a_{j4} = -\frac{1}{r_j}, A(j,4) = -\frac{1}{r_j^2} \quad (1 \le j \le 3),$$
$$A(j,k,4) = \frac{\rho_{jk}^2}{r_j^2 r_k^2} \quad (1 \le j < k \le 3)$$

すなわち $A(j,4) = 0, A(j,k,4) = 0$ となることと $r_j = \infty, \rho_{j,k} = 0$ とはそれぞれ同値である.

以下話を簡単にするために f_j は合同変換で次のように簡約化してあるものとする:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= |x|^2 + 2\alpha_{11}x_1 + 2\alpha_{12}x_2 + \alpha_{10},\\
f_2(x) &= |x|^2 + 2\alpha_{21}x_1 + \alpha_{20},\\
f_3(x) &= |x|^2 + \alpha_{30}.
\end{aligned} \tag{2}$$

このとき

$$\begin{aligned}
r_1^2 &= \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 - \alpha_{10},\\
r_2^2 &= \alpha_{21}^2 - \alpha_{20},\\
r_3^2 &= -\alpha_{30},\\
\rho_{23}^2 &= \alpha_{21}^2,\ \rho_{13}^2 = \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2,\\
\rho_{12}^2 &= (\alpha_{11} - \alpha_{21})^2 + \alpha_{12}^2.
\end{aligned}$$

Lemma 4 条件 (2) の下に

$$\begin{aligned}
&A(0,1,2,3) = -\frac{1}{2}\frac{(\alpha_{30}-1)^2\alpha_{12}^2\alpha_{21}^2}{r_1^2r_2^2r_3^2},\\
&4\alpha_{12}^2\alpha_{21}^2 = \Delta^2(\rho_{23},\rho_{13},\rho_{12}) = -B(0123),\\
&B(0123) = \rho_{23}^4+\rho_{13}^4+\rho_{12}^4-2\rho_{12}^2\rho_{13}^2-2\rho_{12}^2\rho_{23}^2-2\rho_{13}^2\rho_{23}^2.
\end{aligned}$$

$A(0,1,2,3)=0$ となるための必要十分条件は 3 角形 $\Delta O_1O_2O_3$ の面積が 0 すなわち退化するときである．また

$$\begin{aligned}
&\Delta^2(r_1,r_2,\rho_{12}) = -B(0\star 12) =\\
&= -r_1^4-r_2^4-\rho_{12}^4+2r_1^2\rho_{12}^2+r_2^2\rho_{12}^2+2r_1^2r_2^2.
\end{aligned}$$

2　結果

つぎの仮定をおく：

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}\quad A(j,k)>0, A(j,4)<0, A(1,2,3)>0, A(j,k,4)>0,\\
&A(0,1,2,3)<0 \quad (1\le j,k\le 3).
\end{aligned}$$

すなわち Γ_j,Γ_k は 2 点で交わり, $\Gamma_1\cap\Gamma_2\cap\Gamma_3\neq\emptyset$.

Grothendieck-Deligne の定理によれば同型：

$$H^*(X,\mathcal{L})\cong H_\nabla(X,\Omega^\cdot)$$

が成り立ち, $H^*(X,\mathcal{L})$ と $H_*(X,\mathcal{L}^*)$ は互いに双対である．

Proposition 5 $\dim H^2_\nabla(X,\Omega^\cdot)$ は X の Euler 標数に等しくこの場合は 7 である．$H^2_\nabla(X,\Omega^\cdot)$ の基底について

$$H^2_\nabla(X,\Omega^\cdot)\cong\langle\frac{\varpi}{f_j}\,(1\le j\le 3), \frac{\varpi}{f_jf_k}\,(1\le j<k\le 3), \frac{\varpi}{f_1f_2f_3}\rangle.$$

Φ の定める局所系を $\mathcal{L}$, その双対を $\mathcal{L}^*$ で表すとき $H^*_\nabla(X,\Omega^\cdot)$ の双対は $H_*(X,\mathcal{L}^*)$ に同型である．

これに関して次が成り立つ：

Proposition 6 $H_2(X,\mathcal{L}^*)$ の基底として $\Re X - \Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$ のコンパクトな連結成分をとることができる．すなわち $\Re\Gamma_j$ の内部円盤を K_j と記すとき $K_1\cap K_2\cap K_3, K_2\cap K_3-K_1, K_1\cap K_3-K_2, K_1\cap K_2-K_3, K_1-K_2\cup K_3, K_2-K_1\cup K_3, K_3-K_1\cup K_2$ のどれも空でないならばこれらが基底をなす．もし $K_1-K_2\cup K_3$ が空ならば $K_2\cap K_3-K_1$ の連結成分は 2 個ある *etc.*

[記号]
$\lambda_\infty=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ とおく．また対数微分

$$e_{j,k}=\frac{df_j}{f_j}\wedge\frac{df_k}{f_k}$$

とおく.

Lemma 7

$$e_{23}\sim\frac{4\lambda_1}{\lambda_\infty}W\varpi,\ -e_{13}\sim\frac{4\lambda_2}{\lambda_\infty}W\varpi,\ e_{12}\sim\frac{4\lambda_3}{\lambda_\infty}W\varpi.$$

ここで

$$W\varpi=\frac{1}{4}\{e_{23}-e_{13}+e_{12}\}=\frac{\gamma_1^*}{f_2f_3}\varpi+\frac{\gamma_2^*}{f_1f_3}\varpi+\frac{\gamma_3^*}{f_1f_2}\varpi+\frac{\gamma_0^*}{f_1f_2f_3}\varpi$$

ただし

$$\begin{aligned}
&\gamma_j^*=\frac{\gamma_j}{\Delta(\rho_{23},\rho_{13},\rho_{12})},\quad (0\le j\le 3),\\
&\gamma_j=-\rho_{kl}^2r_j^2+\frac{1}{2}r_k^2(-\rho_{jk}^2+\rho_{jl}^2+\rho_{kl}^2)+\frac{1}{2}r_l^2(-\rho_{jl}^2+\rho_{jk}^2+\rho_{kl}^2)\\
&+\frac{1}{2}\rho_{kl}^2(\rho_{jk}^2+\rho_{jl}^2-\rho_{kl}^2),\\
&=\frac{(-1)^j}{2}B\begin{pmatrix}0&*&k&l\\0&1&2&3\end{pmatrix}\quad(1\le j\le 3),\\
&\gamma_0=-\{\rho_{23}^2r_1^4+\rho_{13}^2r_2^4+\rho_{12}^2r_3^4\}+\sum_{1\le j<k\le 3}r_j^2r_k^2(\rho_{kl}^2+\rho_{jl}^2-\rho_{jk}^2)\\
&+\sum_{1\le j<k\le 3}r_l^2\rho_{jk}^2(\rho_{lj}^2+\rho_{lk}^2-\rho_{jk}^2)-\rho_{23}^2\rho_{13}^2\rho_{12}^2\\
&=\frac{1}{2}B(0\star 123).
\end{aligned}$$

ただし $\{j,k,l\}$, $\{k,l\}\,(k<l)$ はそれぞれ集合 $\{1,2,3\}$,$\{1,2,3\}-\{j\}$ を表すものとする. すなわち

$$
\begin{aligned}
&W = \frac{W_0}{2\sqrt{-B(0123)}},\\
&W_0 = W_0(123)\\
&= -B\begin{pmatrix} 0 & \star & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\frac{\varpi}{f_2 f_3} + B\begin{pmatrix} 0 & \star & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\frac{\varpi}{f_1 f_3}\\
&-B\begin{pmatrix} 0 & \star & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\frac{\varpi}{f_1 f_2} + B(0\star 123)\frac{\varpi}{f_1 f_2 f_3}.
\end{aligned}
$$

ずらし $\lambda_1 \to \lambda_1 + 1$ による $H^2_\nabla(X,\Omega^\cdot)$ での作用を T_{f_1} で表す. (1) の差分方程式系は次のように与えられる:

Proposition 8

(i)(自明な等式)

$$T_{f_1}J(\frac{1}{f_1 f_2 f_3}) = J(\frac{1}{f_2 f_3}),\ T_{f_1}J(\frac{1}{f_1 f_2}) = J(\frac{1}{f_2}), T_{f_1}J(\frac{1}{f_1}) = J(1).$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
&\rho_{23}^2\, T_{f_1-f_2}(\frac{1}{f_2 f_3}) = \gamma_2^{(23)}\left(J(\frac{1}{f_2}) - J(\frac{1}{f_3})\right)\\
&+\gamma_{23}^{(23)} J(\frac{1}{f_2 f_3}) - \frac{\Delta(\rho_{23},\rho_{13},\rho_{12})}{4} J(\frac{e_{23}}{dx_1\wedge dx_2}).
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
&\gamma_2^{(23)} = \frac{1}{2}(-\rho_{13}^2 + \rho_{12}^2 + \rho_{23}^2),\\
&\gamma_{23}^{(23)} = -\rho_{23}^2 r_1^2 + \frac{1}{2}(-\rho_{13}^2 + \rho_{12}^2 + \rho_{23}^2) r_3^2 + \frac{1}{2}(-\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2) r_2^2\\
&+\frac{1}{2}(\rho_{13}^2 + \rho_{12}^2 - \rho_{23}^2)\rho_{23}^2.
\end{aligned}
$$

$T_{f_1-f_3}(\frac{1}{f_2 f_3})$ も同様に得られる.

上式はまた次と同等である：

Lemma 9

$$T_{f_1}\left(\frac{\varpi}{f_2f_3}\right)=\frac{1}{B(023)}\{B\begin{pmatrix}0&1&3\\0&2&3\end{pmatrix}\frac{\varpi}{f_3}+B\begin{pmatrix}0&1&2\\0&3&2\end{pmatrix}\frac{\varpi}{f_2}$$
$$-B\begin{pmatrix}0&1&2&3\\0&\star&2&3\end{pmatrix}\frac{\varpi}{f_2f_3}+\frac{1}{2}\sqrt{-B(0123)}\,e_{23}\}$$
$$\sim\frac{1}{B(023)}\{B\begin{pmatrix}0&1&3\\0&2&3\end{pmatrix}\frac{\varpi}{f_3}+B\begin{pmatrix}0&1&2\\0&3&2\end{pmatrix}\frac{\varpi}{f_2}$$
$$-B\begin{pmatrix}0&1&2&3\\0&\star&2&3\end{pmatrix}\frac{\varpi}{f_2f_3}+\frac{\lambda_1}{\lambda_\infty}W_0\varpi\}$$

ここで

$$B(023)=2\rho_{23}^2,$$
$$B\begin{pmatrix}0&\star&3\\0&2&3\end{pmatrix}=r_3^2+\rho_{23}^2-r_2^2,\ B\begin{pmatrix}0&1&3\\0&2&3\end{pmatrix}=\rho_{13}^2+\rho_{23}^2-\rho_{12}^2,$$
$$B(0123)=\rho_{13}^4+\rho_{23}^4+\rho_{12}^4-2\rho_{13}^2\rho_{23}^2-2\rho_{13}^2\rho_{12}^2-2\rho_{12}^2\rho_{23}^2,$$
$$-B\begin{pmatrix}0&1&2&3\\0&\star&2&3\end{pmatrix}=\rho_{23}^2(\rho_{12}^2+\rho_{13}^2-\rho_{23}^2)-2r_1^2\rho_{23}^2$$
$$+r_2^2(\rho_{13}^2+\rho_{23}^2-\rho_{12}^2)+r_3^2(\rho_{12}^2+\rho_{23}^2-\rho_{13}^2).$$

実際

$$T_{f_1}\left(\frac{\varpi}{f_2f_3}\right)=\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}}\frac{\varpi}{f_3}+\frac{\alpha_{21}-\alpha_{11}}{\alpha_{21}}\frac{\varpi}{f_2}$$
$$+\frac{\alpha_{11}(\alpha_{30}-\alpha_{20})+\alpha_{21}(\alpha_{10}-\alpha_{30})}{\alpha_{21}}\frac{\varpi}{f_2f_3}+\frac{\alpha_{12}}{2\alpha_{21}}e_{23}.$$

$$\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}}=\frac{B\begin{pmatrix}0&1&3\\0&2&3\end{pmatrix}}{B(023)},\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}}=\frac{\sqrt{-B(0123)}}{B(023)},$$
$$\frac{\alpha_{11}(\alpha_{30}-\alpha_{20})+\alpha_{21}(\alpha_{10}-\alpha_{30})}{\alpha_{21}}=-\frac{B\begin{pmatrix}0&1&2&3\\0&\star&2&3\end{pmatrix}}{B(023)},$$
$$e_{23}\sim 4\frac{\lambda_1}{\lambda_\infty}W\varpi$$

である。

$T_{f_j}\left(\frac{\varpi}{f_kf_l}\right)$ も対称性より同様に得られる。

次に $T_{f_2-f_3}\left(\frac{\varpi}{f_3}\right)$ を求める。

Lemma 10

$$T_{f_2-f_3}\left(\frac{\varpi}{f_3}\right)=\frac{1}{2\alpha_{12}}\{-\alpha_{21}T_{f_1}(e_{13})+\alpha_{11}T_{f_2}(e_{23})\}+\frac{\alpha_{20}-\alpha_{30}}{f_3}\varpi$$
$$\sim\frac{\alpha_{20}-\alpha_{30}}{f_3}\varpi+\frac{2\alpha_{21}}{\alpha_{12}}\frac{\lambda_2}{\lambda_\infty+1}T_{f_1}(W\varpi)+\frac{2\alpha_{11}}{\alpha_{12}}\frac{\lambda_1}{\lambda_\infty+1}T_{f_2}(W\varpi).$$

等式

$$\alpha_{20}-\alpha_{30}=B\begin{pmatrix}0&\star&3\\0&2&3\end{pmatrix},\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}=\frac{B\begin{pmatrix}0&1&3\\0&2&3\end{pmatrix}}{\sqrt{-B(0123)}},\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{12}}=\frac{B(023)}{\sqrt{-B(0123)}}$$

に注意して Lemma 10 より

$$T_{f_2-f_3}\left(\frac{\varpi}{f_3}\right)\sim B\begin{pmatrix}0&\star&3\\0&2&3\end{pmatrix}\frac{\varpi}{f_3}+\frac{2\lambda_2}{\lambda_\infty+1}\frac{B(023)}{\sqrt{-B(0123)}}T_{f_1}(W\varpi)$$
$$+\frac{2\lambda_1}{\lambda_\infty+1}\frac{B\begin{pmatrix}0&1&3\\0&2&3\end{pmatrix}}{\sqrt{-B(0123)}}T_{f_2}(W\varpi).$$

ところが Lemma 7 より

$$T_{f_1}(W\varpi)=\gamma_1T_{f_1}(\frac{\varpi}{f_2f_3})+\gamma_2\frac{\varpi}{f_3}+\gamma_3\frac{\varpi}{f_2}+\gamma_0\frac{\varpi}{f_2f_3},$$
$$T_{f_2}(W\varpi)=\gamma_2T_{f_2}(\frac{\varpi}{f_1f_3})+\gamma_1\frac{\varpi}{f_3}+\gamma_3\frac{\varpi}{f_1}+\gamma_0\frac{\varpi}{f_1f_3}.$$

故に Lemma 9 より

Lemma 11

$$2B(023)\,T_{f_1}(W\varpi)$$
$$\sim-\sqrt{-B(0123)}\,W_0(23)\varpi-\frac{\lambda_1}{\lambda_\infty}\frac{B\begin{pmatrix}0&\star&2&3\\0&1&2&3\end{pmatrix}}{\sqrt{-B(0123)}}\,W_0(123)\varpi$$

ただし

$$W_0(23)\,\varpi=-B\begin{pmatrix}0&\star&3\\0&2&3\end{pmatrix}\frac{\varpi}{f_3}+B\begin{pmatrix}0&\star&2\\0&2&3\end{pmatrix}\frac{\varpi}{f_2}+B(0\star23)\frac{\varpi}{f_2f_3}.$$

と定義する。

Lemma 9-11 より

Proposition 12

$$
\begin{aligned}
&T_{f_2-f_3}\left(\frac{\varpi}{f_3}\right)=V_0+\frac{\lambda_1}{\lambda_\infty+1}V_1+\frac{\lambda_2}{\lambda_\infty+1}V_2+\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_\infty+1)\lambda_\infty}V_{12},\\
&V_0=B\begin{pmatrix}0&\star&3\\0&2&3\end{pmatrix}\frac{\varpi}{f_3},\\
&V_1=-\frac{B\begin{pmatrix}0&1&3\\0&2&3\end{pmatrix}}{B(013)}W_0(13)\varpi\\
&=\frac{B\begin{pmatrix}0&1&3\\0&2&3\end{pmatrix}}{B(013)}\{B\begin{pmatrix}0&\star&3\\0&1&3\end{pmatrix}\frac{\varpi}{f_3}-B\begin{pmatrix}0&\star&1\\0&1&3\end{pmatrix}\frac{\varpi}{f_1}-B(0\star 13)\frac{\varpi}{f_1f_3}\},\\
&V_2=-W_0(23)\varpi\\
&=B\begin{pmatrix}0&\star&3\\0&2&3\end{pmatrix}\frac{\varpi}{f_3}-B\begin{pmatrix}0&\star&2\\0&2&3\end{pmatrix}\frac{\varpi}{f_2}-B(0\star 23)\frac{\varpi}{f_2f_3},\\
&V_{12}=\frac{B\begin{pmatrix}0&\star&3\\0&1&3\end{pmatrix}}{B(013)}W_0(123)\varpi.
\end{aligned}
$$

もっと具体的に書けば

Proposition 13

$$
T_{f_1-f_2}J(\frac{1}{f_2})=\frac{\lambda_3}{1+\lambda_\infty}V_3+\frac{\lambda_1}{1+\lambda_\infty}V_1+(-r_1^2+r_2^2+\rho_{12}^2)J(\frac{1}{f_2}),
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
&V_1=(\rho_{12}^2+r_1^2-r_2^2)J(\frac{1}{f_1})+(\rho_{12}^2+r_2^2-r_1^2)J(\frac{1}{f_2})+\Delta^2(r_1,r_2,\rho_{12})\,J(\frac{1}{f_1f_2}),\\
&V_3=\\
&\frac{(\rho_{32}^2+r_3^2-r_2^2)(-\rho_{13}^2+\rho_{23}^2+\rho_{12}^2)}{2\rho_{23}^2}J(\frac{1}{f_3})+\frac{(\rho_{23}^2+r_2^2-r_3^2)(-\rho_{13}^2+\rho_{23}^2+\rho_{12}^2)}{2\rho_{23}^2}J(\frac{1}{f_2})\\
&+\Delta^2(r_2,r_3,\rho_{23})\,J(\frac{\varpi}{f_2f_3})+\frac{(r_2^2+\rho_{23}^2-r_3^2)\Delta(\rho_{23},\rho_{13},\rho_{12})}{2\rho_{23}^2}J(\frac{e_{23}}{dx_1\wedge dx_2}).
\end{aligned}
$$

3 ϖ の表示

等式

$$0 \sim \nabla(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)$$

および Lemma 10 より

$$\begin{aligned}
&(\lambda_\infty + 1)\varpi \sim \lambda_1 \frac{\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{10}}{f_1}\varpi + \lambda_2 \frac{\alpha_{21}x_1 + \alpha_{20}}{f_2}\varpi + \lambda_3 \frac{\alpha_{30}}{f_3}\varpi \\
&= \frac{\lambda_1}{2}\{T_{f_1 - f_3}(\frac{\varpi}{f_1}) + (\alpha_{10} + \alpha_{30})\frac{\varpi}{f_1}\} + \frac{\lambda_2}{2}\{T_{f_2 - f_3}(\frac{\varpi}{f_2}) + (\alpha_{20} + \alpha_{30})\frac{\varpi}{f_2}\} \\
&+ \lambda_3 \frac{\alpha_{30}}{f_3}\varpi \\
&= -\sum_{j=1}^{3} \lambda_j\, r_j^2\, \frac{\varpi}{f_j} - \sum_{j=1}^{3} \frac{\lambda_k \lambda_l}{\lambda_\infty + 1} \frac{B(0kl)}{\sqrt{-B(0123)}} T_{f_j}(W\varpi).
\end{aligned}$$

上の等式に Lemma 11 の等式を代入して

$$(\lambda_\infty + 1)\varpi \sim -\sum_{j=1}^{3} \frac{\lambda_j}{2} B(0 \star j)\frac{\varpi}{f_j} + \sum_{1 \le j < k \le 3} \frac{\lambda_j \lambda_k}{2(\lambda_\infty + 1)} W_0(jk)\varpi - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{2(\lambda_\infty + 1)\lambda_\infty} W_0(123)\varpi.$$

もっと具体的に書けば次の Proposition を得る：

Proposition 14

$$\begin{aligned}
&(\lambda_\infty + 1)\varpi \sim -\sum_{j=1}^{3} \lambda_j r_j^2 \frac{\varpi}{f_j} \\
&+ \sum_{1 \le j < k \le 3} \frac{\lambda_j \lambda_k}{2(1 + \lambda_\infty)} \{(r_j^2 - r_k^2 - \rho_{jk}^2)\frac{\varpi}{f_k} + (r_k^2 - r_j^2 - \rho_{jk}^2)\frac{\varpi}{f_j} - \Delta^2(r_j, r_k, \rho_{jk})\frac{\varpi}{f_j f_k}\} \\
&- \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{2\lambda_\infty(\lambda_\infty + 1)} \left\{ -B\begin{pmatrix} 0 & \star & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \frac{\varpi}{f_2 f_3} + B\begin{pmatrix} 0 & \star & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \frac{\varpi}{f_1 f_3} \right. \\
&\left. - B\begin{pmatrix} 0 & \star & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \frac{\varpi}{f_1 f_2} + B(0 \star 123)\frac{\varpi}{f_1 f_2 f_3} \right\}.
\end{aligned}$$

4 変分公式

積分 $\langle \varpi \rangle$ のパラメータ $B = \{\rho_{jk}^2, r_j^2\}$ に関する変分公式を求める。
　定義より直ちに

Lemma 15

$$\nabla_B \varpi \sim \lambda_1 d\alpha_{11}\frac{f_2-f_3-\alpha_{20}+\alpha_{30}}{\alpha_{21}f_1}\varpi+\lambda_1 d\alpha_{12}\{\frac{f_1-f_3}{\alpha_{12}f_1}$$
$$-\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}\alpha_{12}}\frac{f_2-f_3}{f_1}+\frac{\alpha_{11}(\alpha_{20}-\alpha_{30})-\alpha_{21}(\alpha_{10}-\alpha_{30})}{\alpha_{12}\alpha_{21}f_1}\}\varpi+\lambda_1\frac{d\alpha_{10}}{f_1}\varpi$$
$$+\lambda_2 d\alpha_{21}\{\frac{f_2-f_3}{\alpha_{21}f_2}-\frac{\alpha_{20}-\alpha_{30}}{\alpha_{21}f_2}\}\varpi+\lambda_2\frac{d\alpha_{20}}{f_2}\varpi+\lambda_3\frac{d\alpha_{30}}{f_3}\varpi$$

.

さらに

$$\frac{d\alpha_{21}}{\alpha_{21}}=\frac{d\rho_{23}}{\rho_{23}},$$
$$\frac{d\alpha_{11}}{\alpha_{21}}=\frac{-(\rho_{13}^2+\rho_{23}^2-\rho_{12}^2)}{2\rho_{23}^3}d\rho_{23}+\frac{d(\rho_{13}^2+\rho_{23}^2-\rho_{12}^2)}{2\rho_{23}^2},$$
$$\frac{\alpha_{11}d\alpha_{12}}{\alpha_{21}\alpha_{12}}=\frac{\rho_{13}^2+\rho_{23}^2-\rho_{12}^2}{2\rho_{23}^2}\{\frac{1}{2}\frac{dB(0123)}{B(0123)}-\frac{d\rho_{23}}{\rho_{23}}\},$$
$$\frac{(\alpha_{11}-\alpha_{21})d\alpha_{12}}{\alpha_{21}\alpha_{12}}=-\frac{\rho_{12}^2+\rho_{23}^2-\rho_{13}^2}{2\rho_{23}^2}\{\frac{1}{2}\frac{dB(0123)}{B(0123)}-\frac{d\rho_{23}}{\rho_{23}}\}.$$

および

$$\frac{f_2-f_3}{f_1}=\frac{f_2-f_1}{f_1}-\frac{(f_3-f_1)}{f_1}$$

に注意して　Proposition 12,13 を適用すれば次の結果を得る：

Proposition 16

$$\nabla_B\varpi\sim-\sum_{k=1}^{3}\lambda_k d(r_k^2)\langle\frac{\varpi}{f_k}\rangle+\sum_{1\le j<k\le 3}\frac{\lambda_j\lambda_k}{\lambda_\infty+1}W_0(jk)d\log\rho_{jk}+\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_\infty+1)\lambda_\infty}W_0(123)\theta_{123}$$

ここで

$$\theta_{123}=-\frac{B\begin{pmatrix}\star&1&2&3\\0&1&2&3\end{pmatrix}}{8\rho_{12}^2\rho_{13}^2\rho_{23}^2}\frac{dB(0123)}{B(0123)}+\sum_{j=1}^{3}\frac{r_j^2}{4\rho_{jk}^2\rho_{jl}^2}d(\rho_{kl}^2-\rho_{jk}^2-\rho_{jl}^2)$$
$$=-\frac{B\begin{pmatrix}\star&1&2&3\\0&1&2&3\end{pmatrix}}{B(012)B(013)B(023)}\frac{dB(0123)}{B(0123)}-\frac{1}{2}\{\frac{B(0\star1)}{B(012)B(013)}dB\begin{pmatrix}0&2&1\\0&3&1\end{pmatrix}$$
$$+\frac{B(0\star2)}{B(012)B(023)}dB\begin{pmatrix}0&1&2\\0&3&2\end{pmatrix}+\frac{B(0\star3)}{B(013)B(023)}dB\begin{pmatrix}0&1&3\\0&2&3\end{pmatrix}\}$$

次の Schälfli の公式の類似が成り立つ.

Proposition 17

$$d_B J(1) = -\sum_{j=1}^{3} \lambda_j d(r_j^2) J(\frac{1}{f_j}) - \sum_{1\le j<k\le 3} \frac{\lambda_j\lambda_k}{1+\lambda_\infty} d\log\rho_{jk}\{(\rho_{jk}^2 + r_j^2 - r_k^2)J(\frac{1}{f_j})$$
$$+(\rho_{jk}^2 + r_k^2 - r_j^2)J(\frac{1}{f_k}) + \Delta^2(r_j, r_k, \rho_{jk})J(\frac{1}{f_j f_k})\} + \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\lambda_\infty(1+\lambda_\infty)} J(W_0(123))\theta_{123}$$

θ_{123} は対称な $1-$ 微分型式を表す. その明示的な表式は以下のようである：

$$\theta_{123} = \frac{1}{4}\left(-\frac{B\begin{pmatrix} * & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}{2\rho_{2,3}^2\rho_{1,3}^2\rho_{1,2}^2} d\log B(0123) \right.$$
$$+\frac{r_1^2}{\rho_{1,2}^2\rho_{1,3}^2} d(\rho_{2,3}^2 - \rho_{1,2}^2 - \rho_{1,3}^2)$$
$$+\frac{r_2^2}{\rho_{1,2}^2\rho_{2,3}^2} d(\rho_{1,3}^2 - \rho_{1,2}^2 - \rho_{2,3}^2)$$
$$\left. +\frac{r_3^2}{\rho_{1,3}^2\rho_{2,3}^2} d(\rho_{1,2}^2 - \rho_{2,3}^2 - \rho_{1,3}^2) \right).$$

5　隣接関係式

基底 $F_j = \frac{\varpi}{f_j}$, $F_{jk} = \frac{\varpi}{f_j f_k}$ $(j<k), F_{123} = \frac{\varpi}{f_1 f_2 f_3}$ に対して系

$$W_0(j)\varpi = B(0\star j)F_j,$$
$$W_0(jk)\varpi = -B\begin{pmatrix} 0 & \star & k \\ 0 & j & k \end{pmatrix} F_k + B\begin{pmatrix} 0 & \star & j \\ 0 & j & k \end{pmatrix} F_j + B(0\star jk)F_{jk} \quad (j<k),$$
$$W_0(123)\varpi = -B\begin{pmatrix} 0 & \star & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} F_{23} + B\begin{pmatrix} 0 & \star & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} F_{13} + B\begin{pmatrix} 0 & \star & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} F_{12}$$
$$+B(0\star 123)F_{123}$$

は $H_\nabla(X,\Omega^\cdot)$ の別の基底であって, もとの基底とは互いに１次結合で表示される.

いま $H_\nabla(X,\Omega^\cdot)$ において, ずらし：$\lambda_j \to \lambda_j - 1$ が引き起こす自己同型を $T_{f_j}^{-1}$ で表す.

このとき

Proposition 18 次の 隣接関係式 が成り立つ：

$$T_{f_1}^{-1}(W_0(k)\varpi) = B(0\star k)F_{1k} \quad (k=2,3),$$

$$-(\lambda_1-1)T_{f_1}^{-1}(W_0(1)\varpi) = 2\lambda_1 F_1 + \lambda_2\{F_1+F_2+B\begin{pmatrix} 0 & \star & 1 \\ 0 & \star & 2 \end{pmatrix}F_{12}\}$$

$$+\{F_1+F_3+B\begin{pmatrix} 0 & \star & 1 \\ 0 & \star & 3 \end{pmatrix}F_{13}\},$$

$$T_{f_1}^{-1}(W_0(23)\varpi) = -B\begin{pmatrix} 0 & \star & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}F_{13} + B\begin{pmatrix} 0 & \star & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}F_{12} + B(0\star 23)F_{123},$$

$$(\lambda_1-1)T_{f_1}^{-1}(W_0(12)\varpi) \sim \lambda_\infty\{F_1-F_2+B\begin{pmatrix} 0 & \star & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}F_{12}\}$$

$$+\lambda_3\{-B\begin{pmatrix} 0 & \star & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}F_{23} + B\begin{pmatrix} 0 & \star & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}F_{13} + B\begin{pmatrix} 0 & \star & 2 & 3 \\ 0 & \star & 1 & 2 \end{pmatrix}F_{123}\},$$

$$(\lambda_1-1)T_{f_1}^{-1}(W_0(123)\varpi) \sim (\lambda_\infty-1)\{-B\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}F_{13} + B\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}F_{12}$$

$$+B(023)F_{23} + B\begin{pmatrix} 0 & \star & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}F_{123}\}.$$

T_{f_2}, T_{f_3} についても添字をそれぞれ互換 $1 \leftrightarrow 2$, $1 \leftrightarrow 3$ で変換することにより同様な等式が得られる.

References

[1] K.Aomoto, On vanishing of cohomology attached to certain many valued meromorphic functions, Jour. Math. Soc. Japan, 27(1975), 248-255.

[2] K.Aomoto, Configuration and invariant Gauss-Manin connections of integrals I, Tokyo J. Math., 5(1982), 249-287; II, *ibid*, 6(1983), 1-24.

[3] K.Aomoto, Errata to "Configuration and invariant Gauss-Manin connections of integrals I,II", Tokyo J. Math.22(1999), 511-512.

[4] K.Aomoto, Vanishing of certain 1-form attached to a configuration, Tokyo J. Math., 9(1986), 453-454.

[5] K.Aomoto, Gauss-Manin connections of Schläfli type for hypersphere arrangements, Ann.Inst.Fourier, 53(2003),977-995.

[6] K.Aomoto, Hypersphere arrangement and imaginary cycles for hypergeometric integrals, Advanced Studies in Pure Math., 62(2012), 1-26.

[7] K.Aomoto and P.Forrester, On a Jacobian identity associated with real hyperplane arrangements, Compositio Math. 121(2000), 263-295.

[8] P.Orlik and H.Terao, Commutative algebra for arrangements, Nagoya Math. J., 134(1994), 65-73.

[9] P.Orlik and H.Terao, Arrangements and Hypergeometric Integrals, MSJ Memoirs, 9(2001).

[10] 前原??(ひろし)　円と球面の幾何学, 朝倉書店, 1998.

[11] F.Pham, Introduction à L'étude Topologique des Singularités de Landau, Gauthiers Villars, 1967.

[12] C.A.Rogers, Packing and Covering, Cambridge, 1964.