共形的に不変な超幾何積分に関するいくつかの問題

青本和彦

1 序

$\alpha_j = (\alpha_{j1}, \alpha_{j2})\,(1 \le j \le 3)$ を 3 個の 2 次元実ベクトル, $\alpha_{j0} \in \mathbf{R}$ として $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{C}$ の 2 次関数

$$f_j(x) = (x, x) + (\alpha_j, x) + \alpha_{j0}$$

をとする. ただし $|x|^2 = (x, x) = x_1^2 + x_2^2,\ (\alpha_j, x) = \alpha_{j1}x_1 + \alpha_{j2}x_2$ とおく.

$$\Phi(x) = f_1(x)^{\lambda_1} f_2(x)^{\lambda_2} f_3(x)^{\lambda_3} \quad (\lambda_j \in \mathbf{C})$$

とおき解析的な積分

$$J(\varphi) = \int_\sigma \Phi(x)\varphi(x)\varpi, \qquad (1)$$
$$\varpi = dx_1 \wedge dx_2$$

を考察する. ここで $\varphi(x)$ は (複素) 円周

$$\Gamma_j : f_j(x) = 0$$

を除いた複素領域 $X = \mathbf{C}^2 - \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ で正則な有理関数をとる.

積分 (1) を定式化するには X 上の有理的なツウィスト de Rham コホモロジー $H^*_\nabla(X, \Omega^\cdot)$ を用いる. すなわち複素領域 $X = \mathbf{C}^2 - \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ で正則な有理微分型式の空間

$$\Omega = \Omega^0 \oplus \Omega^1 \oplus \Omega^2$$

に働くツウィスト外微分

$$\nabla\psi = d\psi + d\log\Phi\wedge\psi$$

に関するコホモロジーである. 特に $R=\Omega^0$ は複素領域 $X=\mathbf{C}^2-\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$ で正則な有理関数の全体である.

いま立体射影

$$\iota : x_j = \frac{\xi_j}{\xi_3+1} \quad (1\le j\le 2),$$
$$\xi_j = \frac{2x_j}{|x|^2+1}\ (1\le j\le 2),\ \xi_3 = \frac{1-|x|^2}{1+|x|^2}$$

とおけば $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\mathbf{C}S^2$ ($\mathbf{C}S^2$ は複素 2 次元球面: $\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=1$)

であって複素解析的に同型

$$\iota : \mathbf{C}S^2-\{\xi_3+1=0\}\cong\mathbf{C}^2-\{|x|^2+1=0\}$$

が得られる.

積分 (1) は合同変換を許すのでその不変量を用いて積分に関する種々の解析的な量を表すことができる.

いま Γ_j は実の円周を表すものと仮定すれば, その中心 O_j は $(-\alpha_{j1},-\alpha_{j2})$, 半径, 中心間の距離はそれぞれ

$$r_j^2 = |\alpha_j|^2-\alpha_{j0},$$
$$\rho_{j,k}^2 = |\alpha_j-\alpha_k|^2$$

で与えられる. これらはすべて不変量である. その他に 3 点 O_1,O_2,O_3 を頂点とする 3 角形 $\Delta O_1O_2O_3$ の面積 $|[O_1,O_2,O_3]|$ も不変量で次の関係がある:

$$4|[O_1,O_2,O_3]|^2 = \Delta(\rho_{23},\rho_{13},\rho_{12})^2$$
$$= -\rho_{23}^4-\rho_{13}^4-\rho_{12}^4+2\rho_{12}^2\rho_{13}^2+2\rho_{13}^2\rho_{23}^2.$$

$$\tilde{f}_j(\xi) = \frac{(\xi_3+1)}{2r_j}\,f_j\!\left(\frac{\xi_1}{\xi_3+1},\frac{\xi_2}{\xi_3+1}\right)$$
$$= u_{j0}+\sum_{\nu=1}^{3}u_{j\nu}\xi_\nu \text{ (線形)},$$
$$u_{j0} = \frac{1+\alpha_{j0}}{2r_j}, u_{j1} = \frac{2\alpha_{j1}}{2r_j},\ u_{j2} = \frac{2\alpha_{j2}}{2r_j},\ u_{j3} = \frac{\alpha_{j0}-1}{2r_j}.$$

ここで $\tilde{f}_j$ は Lorentz 変換に関して不変なように正規化しておく:

$$-u_{j0}^2+\sum_{\nu=1}^{3}u_{j\nu}^2=1$$

さらに

$$\tilde{f}_4(\xi)=\xi_3+1$$

とおく.

Lorentz 内積 $a_{jk}=(\tilde{f}_j,\tilde{f}_k)$ を

$$a_{jk}=-u_{j0}u_{k0}+\sum_{\nu=1}^{3}u_{j\nu}u_{k\nu}\quad(1\leq j,k\leq 4)$$

とおくとき $a_{11}=a_{22}=a_{33}=1, a_{44}=0$. さらに

$$a_{j0}=u_{j0}\quad(1\leq \jmath\leq 4),\, a_{00}=-1$$

とおいて　5×5 の配置行列 $A=(a_{jk})_{0\leq j,k\leq 4}$ を得る.

$i_1,\dots,i_r$ 行, $j_1,\dots,j_r$ 列の小行列式を

$A\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ j_1 & \dots & j_r \end{pmatrix}$ で表す. 積分 (1) に現れるの特異点はすべて主行列式の零点に含まれる:

$$A(i_1,\dots,i_r)=A\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ i_1 & \dots & i_r \end{pmatrix}=0$$

Quest 1 $H_{\nabla}^{*}(X,\Omega^{\cdot})$ の構造. $H_{\nabla}^{2}(X,\Omega^{\cdot})$ の基底の選択と隣接する微分型式との関係. 特に $\lambda=(\lambda_j)_{1\leq j\leq 3}$ のずらしに対するホロノミックな差分関係式, 多項式の係数に関するホロノミックな微分関係式 (Gauss-Manin 接続) の導出.

Quest 2 積分領域 (ツウィスト・サイクル) の特定と対応する積分の振る舞い.

Quest 3 退化した場合に現れる発散積分の処理. QED 場の理論 (Feynman 積分) への応用.

Lemma 1

$$A(i,j) = \frac{\Delta^2(r_j, r_k, \rho_{jk})}{r_j^2 r_k^2}$$

ここで

$$\begin{aligned}&\Delta^2(r_j, r_k, \rho_{jk}) = -r_j^4 - r_k^4 - \rho_{jk}^4 + 2r_j^2 r_k^2 + 2r_j^2\rho_{jk}^2 + 2r_k^2\rho_{jk}^2\\ &= (r_j + r_k + \rho_{jk})(-r_j + r_k + \rho_{jk})(r_j - r_k + \rho_{jk})(r_j + r_k - \rho_{jk})\end{aligned}$$

$A(j,k) = 0$ となるのは Γ_j, Γ_k が接するときである.

Lemma 2

$$\begin{aligned}&4r_1^2r_2^2r_3^2\,A(1,2,3) = -\{r_1^4\rho_{23}^2 + \ldots\}\\ &+\{r_2^2r_3^2(\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2) + \ldots\} + \{r_1^2\rho_{23}^2(\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2) + \ldots\} - \rho_{23}^2\rho_{13}^2\rho_{12}^2\end{aligned}$$

$A(1,2,3) = 0$ となるのは $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ が共有点をもつときである.
また

$$a_{j4} = -\frac{1}{r_j}, A(j,4) = -\frac{1}{r_j^2} \quad (1 \le j \le 3),$$

$$A(j,k,4) = \frac{\rho_{jk}^2}{r_j^2 r_k^2} \quad (1 \le j < k \le 3)$$

すなわち $A(j,4) = 0, A(j,k,4) = 0$ となることと $r_j = \infty, \rho_{j,k} = 0$ とはそれぞれ同値である.

以下話を簡単にするために f_j は合同変換で次のように簡約化してあるものとする:

$$\begin{aligned}f_1(x) &= |x|^2 + 2\alpha_{11}x_1 + 2\alpha_{12}x_2 + \alpha_{10},\\ f_2(x) &= |x|^2 + 2\alpha_{21}x_1 + \alpha_{20},\\ f_3(x) &= |x|^2 + \alpha_{30}.\end{aligned} \tag{2}$$

このとき

$$\begin{aligned}r_1^2 &= \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 - \alpha_{10},\\ r_2^2 &= \alpha_{21}^2 - \alpha_{20},\\ r_3^2 &= -\alpha_{30},\\ \rho_{23}^2 &= \alpha_{21}^2,\ \rho_{13}^2 = \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2,\\ \rho_{12}^2 &= (\alpha_{11} - \alpha_{21})^2 + \alpha_{12}^2.\end{aligned}$$

Lemma 3 条件 (2) の下に

$$\begin{aligned}
&A(0,1,2,3) = -\frac{1}{2}\frac{(\alpha_{30}-1)^2\alpha_{12}^2\alpha_{21}^2}{r_1^2r_2^2r_3^2},\\
&4\alpha_{12}^2\alpha_{21}^2 = D,\\
&D = -\rho_{23}^4-\rho_{13}^4-\rho_{12}^4+2\rho_{12}^2\rho_{13}^2+2\rho_{12}^2\rho_{23}^2+2\rho_{13}^2\rho_{23}^2 = \Delta^2(\rho_{23},\rho_{13},\rho_{12}).
\end{aligned}$$

$A(0,1,2,3)=0$ となるための必要十分条件は 3 角形 $\Delta O_1O_2O_3$ の面積が 0 すなわち退化するときである.

2　結果

つぎの仮定をおく：

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}\quad A(j,k)>0, A(j,4)<0, A(1,2,3)>0, A(j,k,4)>0,\\
&A(0,1,2,3)<0\quad (1\le j,k\le 3).
\end{aligned}$$

すなわち Γ_j,Γ_k は 2 点で交わり, $\Gamma_1\cap\Gamma_2\cap\Gamma_3\neq\emptyset$.

Grothendieck-Deligne の定理によれば同型：

$$H^*(X,\mathcal{L})\cong H_\nabla(X,\Omega^{\cdot})$$

が成り立ち, $H^*(X,\mathcal{L})$ と $H_*(X,\mathcal{L}^*)$ は互いに双対である.

Proposition 4 $\dim H^2_\nabla(X,\Omega^{\cdot})$ は X の Euler 標数に等しくこの場合は 7 である. $H^2_\nabla(X,\Omega^{\cdot})$ の基底について

$$H^2_\nabla(X,\Omega^{\cdot})\cong\langle\frac{\varpi}{f_j}\,(1\le j\le 3), \frac{\varpi}{f_jf_k}\,(1\le j<k\le 3), \frac{\varpi}{f_1f_2f_3}\rangle.$$

Φ の定める局所系を $\mathcal{L}$, その双対を $\mathcal{L}^*$ で表すとき $H^*_\nabla(X,\Omega^{\cdot})$ の双対は $H_*(X,\mathcal{L}^*)$ に同型である.

これに関して次が成り立つ：

Proposition 5 $H_2(X,\mathcal{L}^*)$ の基底として $\Re X-\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$ のコンパクトな連結成分をとることができる. すなわち $\Re\Gamma_j$ の内部円盤を K_j と記すとき $K_1\cap K_2\cap K_3, K_2\cap K_3-K_1, K_1\cap K_3-K_2, K_1\cap K_2-K_3, K_1-K_2\cup K_3, K_2-K_1\cup K_3, K_3-K_1\cup K_2$ のどれも空でないならばこれらが基底をなす. もし $K_1-K_2\cup K_3$ が空ならば $K_2\cap K_3-K_1$ の連結成分は 2 個ある *etc.*

[記号]
$\lambda_\infty = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ とおく. また対数微分

$$e_{j,k} = \frac{df_j}{f_j} \wedge \frac{df_k}{f_k}$$

とおく.

Lemma 6

$$e_{23} \sim \frac{4\lambda_1}{\lambda_\infty} T\varpi,\ -e_{13} \sim \frac{4\lambda_2}{\lambda_\infty} T\varpi,\ e_{12} \sim \frac{4\lambda_3}{\lambda_\infty} T\varpi.$$

ここで

$$\begin{aligned}
&T\varpi = \frac{1}{4}\{e_{23} - e_{13} + e_{12}\} = \frac{\gamma_1}{f_2 f_3}\varpi + \frac{\gamma_2}{f_1 f_3}\varpi + \frac{\gamma_3}{f_1 f_2} + \frac{\gamma_0}{f_1 f_2 f_3}\varpi,\\
&\gamma_j = \frac{\gamma_j^*}{\Delta(\rho_{23}, \rho_{13}, \rho_{12})},\\
&\gamma_j^* = -\rho_{kl}^2 r_j^2 + \frac{1}{2} r_k^2(-\rho_{jk}^2 + \rho_{jl}^2 + \rho_{kl}^2) + \frac{1}{2} r_l^2(-\rho_{jl}^2 + \rho_{jk}^2 + \rho_{kl}^2) + \frac{1}{2}\rho_{kl}^2(\rho_{jk}^2 + \rho_{jl}^2 - \rho_{kl}^2),\\
&\gamma_0^* = -\{\rho_{23}^2 r_1^4 + \rho_{13}^2 r_2^4 + \rho_{12}^2 r_3^4\} + \sum_{1 \le j < k \le 3} r_j^2 r_k^2(\rho_{kl}^2 + \rho_{jl}^2 - \rho_{jk}^2)\\
&+ \sum_{1 \le j < k \le 3} r_l^2 \rho_{jk}^2(\rho_{lj}^2 + \rho_{lk}^2 - \rho_{jk}^2) - \rho_{23}^2 \rho_{13}^2 \rho_{12}^2.
\end{aligned}$$

ただし $\{j, k, l\}$ は集合 $\{1, 2, 3\}$ を表すものとする.

Proposition 7

$$\begin{aligned}
&\varpi \sim -\sum_{j=1}^{3} \frac{\lambda_j}{\lambda_\infty + 1} r_j^2 \frac{\varpi}{f_j}\\
&- \sum_{1 \le j < k \le 3} \frac{\lambda_j \lambda_k}{(1 + \lambda_\infty)^2}\{(r_j^2 - r_k^2 + \rho_{jk}^2)\frac{\varpi}{f_k} + (r_k^2 - r_j^2 + \rho_{jk}^2)\frac{\varpi}{f_j} + \Delta^2(r_j, r_k, \rho_{jk})\frac{\varpi}{f_j f_k}\}
\end{aligned}$$

ずらし $\lambda_1 \to \lambda_1 + 1$ による $H^2_\nabla(X, \Omega^\cdot)$ での作用を T_{f_1} で表す. (1) の差分方程式系は次のように与えられる:

Proposition 8

(i)(自明な等式)

$$T_{f_1}J(\frac{1}{f_1f_2f_3})=J(\frac{1}{f_2f_3}),\ T_{f_1}J(\frac{1}{f_1f_2})=J(\frac{1}{f_2}),T_{f_1}J(\frac{1}{f_1})=J(1).$$

(ii)

$$\rho_{23}^2\,T_{f_1-f_2}(\frac{1}{f_2f_3})=\gamma_2^{(23)}\left(J(\frac{1}{f_2})-J(\frac{1}{f_3})\right)$$
$$+\gamma_{23}^{(23)}J(\frac{1}{f_2f_3})-\frac{\Delta(\rho_{23},\rho_{13},\rho_{12})}{4}J(\frac{e_{23}}{dx_1\wedge dx_2}).$$

ここで

$$\gamma_2^{(23)}=\frac{1}{2}(-\rho_{13}^2+\rho_{12}^2+\rho_{23}^2),$$
$$\gamma_{23}^{(23)}=-\rho_{23}^2r_1^2+\frac{1}{2}(-\rho_{13}^2+\rho_{12}^2+\rho_{23}^2)r_3^2+\frac{1}{2}(-\rho_{12}^2+\rho_{13}^2+\rho_{23}^2)r_2^2$$
$$+\frac{1}{2}(\rho_{13}^2+\rho_{12}^2-\rho_{23}^2)\rho_{23}^2.$$

$T_{f_1-f_3}(\frac{1}{f_2f_3})$ も同様に得られる.
(iii)

$$T_{f_1-f_2}J(\frac{1}{f_2})=\frac{\lambda_3}{1+\lambda_\infty}V_3+\frac{\lambda_1}{1+\lambda_\infty}V_1+(-r_1^2+r_2^2+\rho_{12}^2)J(\frac{1}{f_2}),$$

ここで

$$V_1=(\rho_{13}^2+r_1^2-r_2^2)J(\frac{1}{f_1})+(\rho_{12}^2+r_2^2-r_1^2)J(\frac{1}{f_2})+A(1,2)J(\frac{1}{f_1f_2}),$$
$$V_3=$$
$$\frac{(\rho_{32}^2+r_3^2-r_2^2)(-\rho_{13}^2+\rho_{23}^2+\rho_{12}^2)}{2\rho_{23}^2}J(\frac{1}{f_3})+\frac{(\rho_{23}^2+r_2^2-r_3^2)(-\rho_{13}^2+\rho_{23}^2+\rho_{12}^2)}{2\rho_{23}^2}J(\frac{1}{f_2})$$
$$+\frac{(r_2^2+\rho_{23}^2-r_3^2)\Delta(\rho_{23},\rho_{13},\rho_{12})}{2\rho_{23}^2}J(\frac{e_{23}}{dx_1\wedge dx_2}).$$

次の Schälfli の公式の類似が成り立つ.

Proposition 9

$$dJ(1) = -\sum_{j=1}^{3} \lambda_j d(r_j^2) J(\frac{1}{f_j}) - \sum_{1 \le j < k \le 3} \frac{\lambda_j \lambda_k}{1+\lambda_\infty} d \log \rho_{jk} \{ (\rho_{jk}^2 + r_j^2 - r_k^2) J(\frac{1}{f_j})$$
$$+(\rho_{jk}^2 + r_k^2 - r_j^2) J(\frac{1}{f_k}) + A(j,k) J(\frac{1}{f_j f_k}) \} + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{\lambda_\infty (1+\lambda_\infty)} J(T) \theta_{123}$$

θ_{123} は対称な $1-$ 微分型式を表す (これはまだ特定できていない).

3　一般化への問題点

\$2 の結果を n 次元において m 個の $n-1$ 次元超球面配置

$$S_j : f_j(x) = |x|^2 + 2(\alpha_j, x) + \alpha_{j0} = 0 \quad (1 \le j \le m)$$

に拡張することを考える. ここで

$$|x|^2 = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2,\ \alpha_j = (\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{jn}) \in \mathbf{R}^n,\ \alpha_{j0} \in \mathbf{R},$$
$$(\alpha_j, x) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{j\nu} x_\nu.$$

$X = \mathbf{C}^n - \bigcup_{j=1}^{m} S_j$ において正則な有理的微分型式の空間を $\Omega^\cdot$, 乗法関数

$$\Phi(x) = \prod_{j=1}^{m} f_j(x)^{\lambda_j} \quad (\lambda_j \in \mathbf{C})$$

に付随する共変微分

$$\nabla \psi = d\psi + d \log \Phi \wedge \psi$$

による de Rham コホモロジーを $H_\nabla^*(X, \Omega^\cdot)$, Φ の定める X 上の局所系を $\mathcal{L}$, その双対を $\mathcal{L}^*$ と記す.

以下 λ_j はすべて正数と仮定する.

Lemma 10 $\lambda = (\lambda_j)_j$ が generic ならば次の事実が成り立つ.

$$\text{(i)} \quad H^p_\nabla(X, \Omega^\cdot) \cong \{0\} \quad (0 \le p \le n-1).$$
$$\text{(ii)} \quad \dim H^n_\nabla(X, \Omega^\cdot) = |Eu(X)| = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{m}{\nu} + \binom{m-1}{n} - 1.$$

ただし $Eu(X)$ は X の Euler 指数を表す. 特に $m = n+1$ ならば $|Eu(X)| = 2^{n+1} - 1$.

以下

$$\varpi = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

と記す.

$\mathbf{R}^n$ において $\Re S_j$ の内部 K_j に対して次の仮定をおく：

($\mathcal{H}$) $p = \min(m, n+1)$ とおくとき, すべての $\{i_1, \ldots, i_p\} \subset \{1, 2, \ldots, m\}$ に対して

$$K_{i_1} \cap \cdots \cap K_{i_p} \neq \emptyset.$$

[Conjecture 1]

$\mathbf{R}^n - \bigcup_{j=1}^m S_j$ の有界な連結成分 (コンパクトな部屋) の個数は $|Eu(X)|$ に等しい. それ故また $\dim H_n(X, \mathcal{L}^*)$ にも等しい. さらに各コンパクトな部屋を代表元とするコホモロジー類は $H_n(X, \mathcal{L}^*)$ の基底をなす.

[Conjecture 2]

α_j が generic ならば $H^n_\nabla(X, \Omega^\cdot)$ はそれぞれ

$$\frac{\varpi}{f_{i_1} \cdots f_{i_p}} \quad (1 \le p \le n+1) \quad (m \ge n+1 \text{ の場合}),$$
$$\frac{\varpi}{f_{i_1} \cdots f_{i_p}} \quad (1 \le p \le m) \quad (m \le n \text{ の場合})$$

で張られる. ただし $\{i_1, \ldots, i_p\}$ は {1,2,...,m} の部分集合を表す. 特に

$$\varpi \sim \sum_{p=1}^{\min(m,n+1)} \sum_{\{i_1,\ldots,i_p\}} C_{i_1,\ldots,i_p} \frac{\varpi}{f_{i_1} \ldots f_{i_p}} \quad \text{in } H^n_\nabla(X, \Omega^\cdot)$$

と表される. ここで $C_{i_1,\ldots,i_p}$ は定数である.

Remark 一般に, $m \geq n+2$ のとき α_j が generic ならば $\{i_1, i_2, \ldots, i_{n+2}\} \subset \{1, 2, \ldots, m\}$ に対して部分分数分解が得られる:

$$\frac{1}{f_{i_1}\cdots f_{i_{n+2}}} = \sum_{p=1}^{n+1} \sum_{\{j_1,\ldots,j_p\}\subset\{i_1,\ldots,i_{n+2}\}} \frac{\gamma_{j_1\cdots j_p}}{f_{j_1}\cdots f_{j_p}}$$

ここで　$\gamma_{j_1\cdots j_p}$ は定数である.

次の予想は一般的に述べられる：

[Conjecture 3]

$S_1, \ldots, S_m$ が条件 $(\mathcal{H})$ を満たす任意の超球面の配置とし, α_j, α_{j0} が全く任意とする.

(i) $H^n_\nabla(X, \Omega^\cdot)$ は

$$\frac{\varpi}{f_{i_1}\cdots f_{i_p}} \quad (1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq m)$$

を代表元とするコホモロジーで張られる. しかしこれらは互いに１次独立とは限らない.

(ii) $|Eu(X)|$ は常に超球面配置のコンパクトな部屋の個数に等しい.

References

[1] K.Aomoto, On vanishing of cohomology attached to certain many valued meromorphic functions, Jour. Math. Soc. Japan, 27(1975), 248-255.

[2] K.Aomoto, Configuration and invariant Gauss-Manin connections of integrals I, Tokyo J. Math., 5(1982), 249-287; II, *ibid*, 6(1983), 1-24.

[3] K.Aomoto, Errata to "Configuration and invariant Gauss-Manin connections of integrals I,II", Tokyo J. Math.22(1999), 511-512.

[4] K.Aomoto, Vanishing of certain 1-form attached to a configuration, Tokyo J. Math., 9(1986), 453-454.

[5] K.Aomoto, Gauss-Manin connections of Schläfli type for hypersphere arrangements, Ann.Inst.Fourier, 53(2003),977-995.

[6] K.Aomoto, Hypersphere arrangement and imaginary cycles for hypergeometric integrals, Advanced Studies in Pure Math., 62(2012), 1-26.

[7] K.Aomoto and P.Forrester, On a Jacobian identity associated with real hyperplane arrangements, Compositio Math. 121(2000), 263-295.

[8] P.Orlik and H.Terao, Commutative algebra for arrangements, Nagoya Math. J., 134(1994), 65-73.

[9] P.Orlik and H.Terao, Arrangements and Hypergeometric Integrals, MSJ Memoirs, 9(2001).

[10] F.Pham, Introduction à L'étude Topologique des Singularités de Landau, Gauthiers Villars, 1967.

[11] C.A.Rogers, Packing and Covering, Cambridge, 1964.