

「超幾何積分と虚サイクル」沼津 2012.  
青本和彦

## 1 超幾何積分の定式化

まず記号を導入する。

$P_k(x)$  ( $1 \leq k \leq m$ ) を変数  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}^n$  について次数  $\deg P_k = l_k > 0$  の多項式する。 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{C}^m$  に対し乗法関数

$$\Phi_\lambda(x) = \prod_{k=1}^m P_k(x)^{\lambda_k}$$

が定義されているものとする。我々は次のような解析的な積分

$$J_\lambda(\varphi) = \int_{\mathfrak{z}} \Phi_\lambda(x) \varphi(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \quad (1)$$

の構造を理解することを目的とする。

$M = \mathbf{C}^n - D$ ,  $D = \bigcup_{k=1}^m \{P_k = 0\}$  とおく。 $M$  はアフィン多様体である。 $\Phi$  に付随する局所系  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\lambda$  またその双対局所系を  $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}_{-\lambda}$  で表す。

対数微分型式  $\omega = \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{dP_k}{P_k}$  による共変微分  $\nabla\psi = d\psi + \omega \wedge \psi$  に付随する掬じれ de Rham コホモロジー

$$H_{\nabla}^*(M, \Omega(*D)) = \bigoplus_{p=0}^n H_{\nabla}^p(M, \Omega(*D)) \quad (2)$$

が定義される。ここで  $\Omega(*D)$  は  $M$  において正則、 $D$  に沿って高々極を持つような有理的微分型式の空間を表す。

Grothendieck-Deligne の定理によれば

$$H^*(M, \mathcal{L}) \cong H_{\nabla}^*(M, \Omega(*D)) \quad (3)$$

が成り立つ。

さらに

“  $M$  および  $\lambda$  が generic である”

という条件のもとで次の消滅定理 (松島・村上 型定理)

**Proposition 1**

$$H^p(M, \mathcal{L}) \cong \{0\} \quad (0 \leq p \leq n-1) \quad (4)$$

が成り立つ。

その結果として

**Corollary 2**

$$\dim H^n(M, \Omega(*D)) = (-1)^n Eu(M) \quad (5)$$

$\varphi \in \Omega^0(*D)$  をとるとき、積分 (1) は  $n$  次元コホモロジーとホモロジーの双対関係：

$$\begin{array}{ccc} H^n(M, \Omega(*D)) & \otimes & H_n(M, \mathcal{L}^*) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ (\varphi & , & \mathfrak{z}) & \longrightarrow & J_\lambda(\varphi) \end{array}$$

として表現される。

$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbf{Z}^m - \{0\}$  をとり固定する。

$$\lambda = \lambda' + N\nu \quad (\lambda' \in \mathbf{C}^n \text{ (固定)}, N \in \mathbf{Z}_{>0})$$

に対して

$$\begin{aligned} J_\lambda(\varphi) &= \int_{\mathfrak{z}} \Phi_\lambda(x) \varphi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \int_{\mathfrak{z}} \Phi_{\lambda'}(x) \exp[NF(x)] \varphi(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \end{aligned} \quad (6)$$

$F(x) = \sum_{k=1}^m \nu_k \log P_k(x)$  とおき実関数

$$\Re F = \sum_{k=1}^m \nu_k \log |P_k|$$

の勾配ベクトル場  $\mathbf{v} = \text{grad } \Re F$  を考察する。

以下

“  $\mathbf{v}$  の零点、すなわち  $\Re F$  の臨界点は  $M$  において非退化である” と仮定する。

この零点はまた等式

$$\omega = 0 \tag{7}$$

を満たす点とも一致する。

次の事実が成り立つ：

**Proposition 3**  $v$  の特異点はすべて符号が  $(n(+), n(-))$  型である。そして

$$v \text{ の特異点の個数} = (-1)^n Eu(M).$$

c.f. K.A. and M.Kita, Theory of Hypergeometric Functions, Springer, 2011.

## 2 実例

[例 1] Jacobi 多項式  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  と第 2 解  $Q_n^{(\alpha, \beta)}(x)$

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \left( \frac{d}{dx} \right)^n \{ (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \} dt \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \oint_{(x)} (1-t)^{n+\alpha} (1+t)^{n+\beta} (t-x)^{-n-1} dt, \\ Q_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= -\frac{(-1)^n}{2^n} (x-1)^{-\alpha} (x+1)^{-\beta} \int_{-1}^1 (1-t)^{n+\alpha} (1+t)^{n+\beta} (t-x)^{-n-1} dt \end{aligned}$$

[例 2] 超幾何関数  ${}_rF_{r-1}$  の特別な場合。

$$G_r(n) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m}^r \quad (r = 0, 1, 2, \dots)$$

$$G_r(n) \approx? \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$G_0(n) = n + 1, G_1(n) = 2^n, G_2(n) = \binom{2n}{n}.$$

**Proposition 4**

$$\begin{aligned}
G_r(n) &= \frac{(-1)^n}{(n!)^{r-1}} \frac{\partial^{n(r-1)}}{\partial u_1^n \cdots \partial u_{r-1}^n} \left\{ \left( (1-u_1)(1-u_{r-1}) \prod_{k=1}^{r-2} (u_k + u_{k+1}) \right)^n \right\}_{u_1=\cdots=u_{r-1}=0} \\
&= (-1)^n \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^{r-1} \oint_{(0)^{r-1}} \left( (1-u_1)(1-u_{r-1}) \prod_{k=1}^{r-2} (u_k + u_{k+1}) \right)^n \\
&\quad \cdot \left( \prod_{k=1}^{r-1} u_k \right)^{-n-1} du_1 \wedge \cdots \wedge du_{r-1}
\end{aligned}$$

**Lemma 5**

$$F = \log(u_1 - 1) + \log(u_{r-1} - 1) + \sum_{k=1}^{r-2} \log(u_k + u_{k+1}) - \sum_{k=1}^{r-1} \log(u_k)$$

方程式

$$\omega = 0$$

の  $M$  での解は  $\eta = e^{\frac{2\pi i}{r}}$  とおくと

$$u = (-\eta^j, -\eta^{2j}, \dots, -\eta^{(r-1)j}) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, r-1)$$

である。

結果として

$$G_r(n) = \sum_{j=0}^{r-1} C_j \left\{ (1 + \eta^j)^{r-1} (1 + \eta^{-j(r-1)}) \right\}^n n^{-\frac{r-1}{2}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

特に  $n = 3$  ならば

$$G_3(n) = \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^2 \oint_{(0)^2} (1-u_1)^n (1-u_2)^n (u_1+u_2)^n (u_1 u_2)^{-n-1} du_1 \wedge du_2$$

$\eta = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$  とおくと

$$G_3(n) = C_1 2^{3n} \left( \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + C_2 (-1)^n \left( \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right).$$

**Remark**  $G_3(n)$  は漸化式

$$\begin{aligned} 0 &= n^2(3n-5)G_3(n) + 2(-9n^2 + 24n^2 - 17n + 4)G_3(n-1) \\ &+ (-3n+4)(15n^2 - 35n + 18)G_3(n-2) + 8(-n+2)^2(-3n+2)G_3(n-3) \\ &(n \geq 3) \end{aligned} \quad (8)$$

を満たすことが知られている (いわゆる WZ-method による)。一般に  $G_r(n)$  は階数  $r$  の差分方程式を満たすことがわかるが明示的な方程式は知られていないと思われる。WZ-method は格子状の和をいわば De Rham コホモロジーの離散版と見立てて上記と同様な考察をする方法である。WZ-method のくわしいことは次の文献を参照：

c.f. M.Petkovsek, H.S.Wilf, D.Zeilberger : A=B, Wellesley, MA, 1996.

[例 3] Selberg 型の相関関数

$$\begin{aligned} S_{n,m}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda; t_1, \dots, t_m) &= \int_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^n \prod_{k=1}^m (t_i - t_k) D_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n, \\ D_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda}(x) &= \prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_1} (1-x_i)^{\lambda_2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|^\lambda \end{aligned}$$

Question.

$$S_{n,m}(t_1, \dots, t_m) \approx? \quad (n \rightarrow \infty)$$

$m=0$  のときは Selberg 積分,  $m=1$  のときは定数倍を除いて変数  $1-2t_1$  の Jacobi 多項式  $P_n^{(\alpha, \beta)}(1-2t_1)$ , ここで

$$\alpha = -1 + 2(\lambda_1 + 1)/\lambda, \beta = -1 + 2(\lambda_2 + 1)/\lambda.$$

$m=2$  のときは

**Proposition 6**

$$\begin{aligned} S_{n,2}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda; t_1 t_2) &= (-1)^n S_{n,0}(\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \lambda) \cdot F_4(a, b, c; t_1 t_2, (1-t_1)(1-t_2)), \\ a = -n, b &= \frac{2}{\lambda}(\lambda_1 + \lambda_2 + 3) + n - 1, c_1 = \frac{2(\lambda_1 + 1)}{\lambda}, c_2 = \frac{2(\lambda_2 + 1)}{\lambda}. \end{aligned}$$

ここで  $F_4(a, b, c_1, c_2; u, v)$  は 4 型 Appell の超幾何関数。

c.f. J.Kaneko, SIAM J.Math., 24(1993), 1-86-1110.

[予想]

$t_i \neq 0, 1 (1 \leq i \leq m)$  のとき

$$S_{n,m}(t_1, \dots, t_m) \approx \sum_{\varepsilon=(\varepsilon_k)_k, (1 \leq k \leq m)} C_\varepsilon \prod_{i=1}^m (\sqrt{t_i} + \varepsilon_i \sqrt{t_i - 1})^{2n} n^{-\frac{m}{2}} \quad (9)$$

$C_\varepsilon$  を明示的に求められるか？

**Remark** (9) は  $0 \leq t_i \leq 1$  のときと  $|t_i| > 1$  のときとでは振る舞いが全く異なる。 $m = 1$  のときは [例 1] の場合である。

c.f. K.Aomoto, Ramanujan Revisited, 1987, 591-605.

### 3 問題の設定

以下  $P_k(x)$  はすべて実多項式と仮定する。

次の一般的な問題が考えられる：

“与えられた  $\varphi, \mathfrak{z}$  に対して (6) はいかなる振る舞いをするか？”

つぎの Proposition は鞍点法としてよく知られている：

**Proposition 7** ベクトル場  $\mathbf{v}$  の零点  $\mathbf{c}_k (1 \leq k \leq \kappa, \kappa = |Eu(M)|)$  を  $+\infty$  極限点とする縮小 (安定) サイクル  $\mathfrak{z}_k$  とするとき、 $(\mathfrak{z}_k)_k$  は  $H_n(M, \mathcal{L}^*)$  の基底をなす。さらに  $\alpha_k = F(\mathbf{c}_k)$  とおくと、 $N \rightarrow \infty$  において漸近展開

$$J_\lambda(\varphi) \approx C_k \exp[N\alpha_k] N^{-\frac{n}{2}}$$

を満たす。

[基本問題 1]. 如何にして  $\mathfrak{z}_k$  を明示的に構成できるか？

[基本問題 2].  $\mathfrak{z}$  は  $H_n(M, \mathcal{L}^*)$  の元として  $\mathfrak{z}_k$  とどんな関係があるか？

[Case 1]. 超平面配置 i.e.,  $l_k = 1 (1 \leq k \leq m)$ .

**Proposition 8** すべて

$$C_1 : \nu_1 > 0, \dots, \nu_m > 0$$

ならば  $c_k$  はすべて  $\mathbb{R}^n - D$  の連結成分であるコンパクトな部屋に含まれ、しかも各部屋ごとにただひとつだけ存在する。 $\mathfrak{z}_k$  は  $c_k$  を含むただひとつのコンパクトな部屋である。従って  $\mathfrak{z}_k$  はすべて実サイクルとして実現できる。

Quest 1  $C_1$  を満たさない場合？特に条件

$$C'_1 : \nu_1 < 0, \dots, \nu_m < 0$$

の下での縮小サイクル  $(\mathfrak{z}'_k)_k$  と  $(\mathfrak{z}_k)_k$  との関係？

以下  $n = 1$  の場合にすこし詳しく検討する。

$n = 1$  の場合： $\kappa = m - 1$ ，この場合はサイクル  $\mathfrak{z}'_k$  は曲線は等式

$$\Im F(x) = C$$

の形で実現される。

$$\Phi(x) = \prod_{k=1}^m (x - a_k)^{\lambda_k},$$

$$a_1 < a_2 < \dots < a_m$$

と仮定する。 $\lambda \in \mathbb{C}^m$  に関して  $J_\lambda = J_\lambda(\varphi)$  は次のホロノミックな差分方程式系を満たす：

$\{e_k\}_{1 \leq k \leq m}$  を  $\mathbb{Z}^m (\subset \mathbb{C}^m)$  の標準基底とすると、

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k J_{\lambda - e_k} = 0,$$

$$J_{\lambda - e_i - e_j} = \frac{J_{\lambda - e_i} - J_{\lambda - e_j}}{a_i - a_j}, \quad (i \neq j),$$

$$(\lambda_j - 1) J_{\lambda - 2e_j} = \sum_{k \neq j} \lambda_k \frac{J_{\lambda - e_j} - J_{\lambda - e_k}}{a_j - a_k}.$$

**Proposition 9** 仮定  $C'_1$  の下で考える。  $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$  ならば  $c_j$  は区間  $(a_j, a_{j+1})$  にあり  $\mathfrak{z}_j = [a_j, a_{j+1}]$  ( $1 \leq j \leq m-1$ ) ととることができる。  $\mathfrak{z}'_j$  は  $H_1(M, \mathcal{L}^*)$  の元として  $\mathfrak{z}_j$  とただ 1 点で交わる虚サイクルとして定義できる。

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}'_j &= -2i \sum_{k=1}^j \frac{\sin \pi(\lambda_1 + \cdots + \lambda_k) \sin \pi(\lambda_{j+1} + \cdots + \lambda_m)}{\sin \pi(\lambda_1 + \cdots + \lambda_m)} \mathfrak{z}_k \\ &\quad - 2i \sum_{k=j+1}^{m-1} \frac{\sin \pi(\lambda_1 + \cdots + \lambda_k) \sin \pi(\lambda_{j+1} + \cdots + \lambda_m)}{\sin \pi(\lambda_1 + \cdots + \lambda_m)} \mathfrak{z}_k \end{aligned}$$

もうひとつの例は  $c_k$  が 1 点を除いてすべて虚数点となる場合である：

**Lemma 10** (i)  $m = 2l + 1$  の場合。

$\nu$  が条件

$$C_2: \nu_{2j+1} + \cdots + \nu_{2k+1} > 0 \quad (j \leq k); \nu_{2j} + \cdots + \nu_{2k} < 0 \quad (j \leq k)$$

を満たすならば  $c_k$  はすべて虚数点である ( $\overline{c_{2j-1}} = c_{2j}$ ,  $\Im c_{2j-1} > 0$ )。

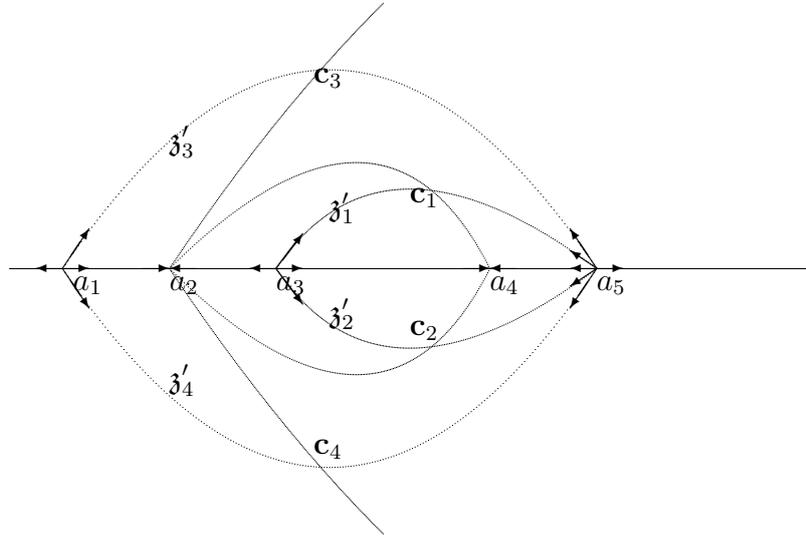
(ii)  $m = 2l$  の場合。

$\nu$  が条件

$$\begin{aligned} C_3: \quad &\nu_{2j+1} + \cdots + \nu_{2k+1} < 0 \quad (j \leq k); \nu_{2j} + \cdots + \nu_{2k} > 0 \quad (j \leq k); \\ &\nu_1 + \cdots + \nu_{2k} > 0 \end{aligned}$$

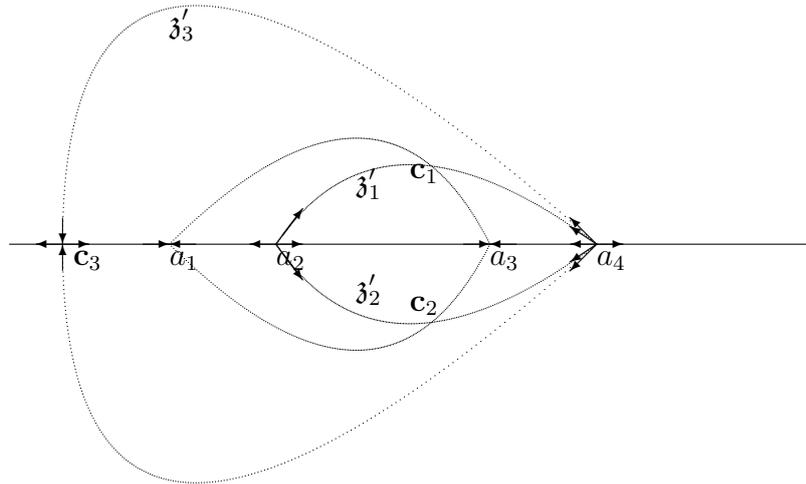
を満たすならば  $c_1, \dots, c_{2l-2}$  は虚数点 ( $\overline{c_{2j-1}} = c_{2j}$ ,  $\Im c_{2j-1} > 0$ )、また  $c_{2l-1} \in (-\infty, a_1)$  である。

Fig 1.  $m = 5$  の相図の例。  $\Im F(c_1) < \Im F(c_3)$  を仮定する。



$$\begin{aligned} \mathfrak{z}'_1 &= e^{\pi i \lambda_5} \mathfrak{z}_4 + e^{\pi i (\lambda_4 + \lambda_5)} \mathfrak{z}_3, \\ \mathfrak{z}'_2 &= e^{-\pi i \lambda_5} \mathfrak{z}_4 + e^{-\pi i (\lambda_4 + \lambda_5)} \mathfrak{z}_3, \\ \mathfrak{z}'_3 &= e^{\pi i \lambda_5} \mathfrak{z}_4 + e^{\pi i (\lambda_4 + \lambda_5)} \mathfrak{z}_3 + e^{\pi i (\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5)} \mathfrak{z}_2 + e^{\pi i (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5)} \mathfrak{z}_1, \\ \mathfrak{z}'_4 &= e^{-\pi i \lambda_5} \mathfrak{z}_4 + e^{-\pi i (\lambda_4 + \lambda_5)} \mathfrak{z}_3 + e^{-\pi i (\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5)} \mathfrak{z}_2 + e^{-\pi i (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5)} \mathfrak{z}_1. \end{aligned}$$

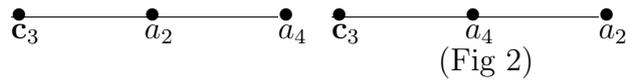
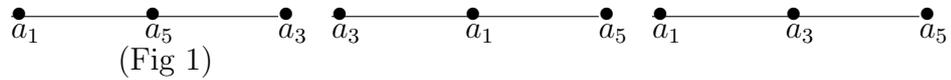
Fig 2.  $m = 4$  の相図の例.  $\Im F(\mathbf{c}_1) < \Im F(\mathbf{c}_3)$  と仮定する。



$$\begin{aligned} \mathfrak{z}'_1 &= e^{\pi i \lambda_4} \mathfrak{z}_3 + e^{\pi i (\lambda_3 + \lambda_4)} \mathfrak{z}_2, \\ \mathfrak{z}'_2 &= e^{-\pi i \lambda_4} \mathfrak{z}_3 + e^{-\pi i (\lambda_3 + \lambda_4)} \mathfrak{z}_2, \\ \mathfrak{z}'_3 &= 2i \sin \pi \lambda_4 \mathfrak{z}_3 + 2i \sin \pi (\lambda_3 + \lambda_4) \mathfrak{z}_2 + 2i \sin \pi (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \mathfrak{z}_1. \end{aligned}$$

**Remark** 一般に  $m = 2l - 1$  の場合、奇数番号  $\{1, 3, \dots, 2l - 1\}$  を頂点とする樹木グラフを用いて、 $m = 2l$  の場合には偶数番号  $\{2, 4, \dots, 2l\}$  と

$c_{2l-1}$  を頂点し、2 頂点を結ぶサイクルを辺とする樹木グラフを用いて相図をすべて数えあげることができる。ちなみに  $m = 5, 4$  の場合は Fig 1, Fig 2 を含めてそれぞれ 3, 2 種類ある：



**Quest 2 [Case2].** 超球面配置 i.e.,  $l_1 = 2, l_2 = \dots = l_m = 1$  で  $\mathcal{C}_1$  を満たす場合？

1 次独立なサイクルの個数は

$$\kappa = \sum_{\nu=0}^n \binom{m-1}{\nu}.$$

条件  $\mathcal{C}_1$  の下で、 $\Re F$  の臨界点がすべて実点であるような配置が存在するが、そうでない場合には完全な分類は私にはできていない。

**Quest 3 [Case3].** 2 次超曲面配置すなわち、すべて  $l_k = 2$  の場合で条件  $\mathcal{C}_1$  を満たす場合？

$$\kappa = \sum_{\nu=0}^n \binom{m-1}{\nu} \frac{(m)_{n-\nu}}{(n-\nu)!},$$

$$\kappa = 1 (m = 1); = 2n + 1 (m = 2); = 2n^2 + 2n + 1 (m = 3), \text{ etc.}$$

$n = 2$  の場合には条件  $\mathcal{C}_1$  の下で、 $\Re F$  の臨界点がすべて実点であるような配置が存在する。しかし  $n \geq 3$  の場合にはそれも期待できそうにない。