古典的不変式論と曲線の微分方程式

阿賀岡 芳夫 (広島大学)

2019年3月7日

話の発端

J.M.Landsberg, C.Robles
Fubini-Griffiths-Harris rigidity of homogeneous varieties, Intern. Math. Res. Notices vol.2013 No.7 1643–1664

Introduction, History のところに,

he (Monge) proved that conics in the plane are characterized by a fifth-order ODE.

実際に計算してみました

$$a_1x^2 + a_2xy + y^2 + a_3x + a_4y + a_5 = 0$$

微分して, $a_1 \sim a_5$ を消去する

$$2a_1x + a_2y + a_2xy' + 2yy' + a_3 + a_4y' = 0$$

$$2a_1 + 2a_2y' + a_2xy'' + 2y'^2 + 2yy'' + a_4y'' = 0$$

$$3a_2y'' + a_2xy''' + 6y'y'' + 2yy''' + a_4y''' = 0$$

順に, a_5, a_3, a_1 が消せた. a_2, a_4 がまだ残っている.

更に微分する

$$3a_2y'' + a_2xy''' + 6y'y'' + 2yy''' + a_4y''' = 0$$

$$4a_2y''' + a_2xy^{(4)} + 6y''^2 + 8y'y''' \\ +2yy^{(4)} + a_4y^{(4)} = 0$$

$$5a_2y^{(4)} + a_2xy^{(5)} + 20y''y''' + 10y'y^{(4)} \\ +2yy^{(5)} + a_4y^{(5)} = 0$$

上の二つから a_2, a_4 が求まる.
それを三つ目の式に代入すれば, 微分方程式が得られる

a_2, a_4 は

$$a_2 = 2(-3y'y''y^{(4)} + 4y'y'''^2 + 3y''^2y''')/F$$

$$\begin{aligned} a_4 = 2(&3xy'y''y^{(4)} - 4xy'y'''^2 - 3xy''^2y''' \\ &-3yy''y^{(4)} + 4yy'''^2 - 9y''^3)/F \end{aligned}$$

ここに， $F = 3y''y^{(4)} - 4y'''^2$

これを三つ目の式に代入すると，$\cdots$

$$2y''(9y''^2 y^{(5)} - 45y''y'''y^{(4)} + 40y'''^3)/F = 0$$

a_2, a_4 が複雑な割には, 単純な式

$y'' = 0$ は無視して,

$$9y''^2 y^{(5)} - 45y''y'''y^{(4)} + 40y'''^3 = 0$$

が, 目的の２次曲線が満たす５階の**ODE**

少し脱線：逆に, この微分方程式を解いてみましょう

$$9y''^2y^{(5)} - 45y''y'''y^{(4)} + 40y'''^3 = 0$$

$u = y''$ とおくと,

$$9u^2u''' - 45uu'u'' + 40u'^3 = 0$$

ここで, $u = f^{-\frac{3}{2}}$ とおくと, この微分方程式は

$9f^2f''' = 0$, つまり, $f''' = 0$ となる.

従って, $f = ax^2 + bx + c$.　よって

$$y'' = (ax^2 + bx + c)^{-\frac{3}{2}}$$

という微分方程式に帰着される.

２回積分を繰り返すと

$$y = \frac{4}{4ac-b^2}\sqrt{ax^2 + bx + c} + dx + e$$

となる. $dx + e$ を移項して２乗すると, 一般の２次曲線が得られる.

$9u^2u''' - 45uu'u'' + 40u'^3 = 0$　が解ける理由

$u = f^k$　とおくと,

$$u' = kf^{k-1}f'$$

$$u'' = k(k-1)f^{k-2}f'^2 + kf^{k-1}f''$$

$$u''' = k(k-1)(k-2)f^{k-3}f'^3 \\ +3k(k-1)f^{k-2}f'f'' + kf^{k-1}f'''$$

元の微分方程式に代入すると,

$$9f^2f''' - 9(2k+3)ff'f'' + 2(2k+3)(k+3)f'^3 = 0$$

となる. $\Longrightarrow k = -\frac{3}{2}$ とおけばよい.　(脱線終わり)

この式を見て, 私にはひらめくものがありました!

$$\Longrightarrow$$ 古典的不変式論

その説明の前に, 変数変換して係数を整える

$z_k = \dfrac{y^{(k)}}{k!}$ とおく.

$$y = z_0,\ y' = z_1,\ y'' = 2z_2,\ y''' = 6z_3,\ \cdots$$

すると,

$$9y''^2y^{(5)} - 45y''y'''y^{(4)} + 40y'''^3$$

$$= 4320({z_2}^2z_5 - 3z_2z_3z_4 + 2{z_3}^3)$$

特徴

- 同次３次式
- 係数の和＝$\mathbf{0}$
- 添字の和＝$\mathbf{9}$ で一定　(微分の回数の和)
- x や $y = z_0$, $y' = z_1$ が現れない

ちなみに, 分母 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F = 3y''y^{(4)} - 4y'''^2 = 144(z_2z_4 - z_3{}^2)}$$

であり,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F = 0} &\iff \boldsymbol{Ax^2 + xy + Bx + Cy + D = 0} \\ &\iff \boldsymbol{y^2} \text{ の項がなく, } \boldsymbol{xy} \text{ の係数} \boldsymbol{\neq 0} \text{となる} \\ &\qquad \text{２次曲線} \\ &\iff \boldsymbol{y = \frac{ax+b}{cx+d} + ex}\end{aligned}$$

古典的不変式論入口 — ２元 n次形式

$$S^n(\mathrm{C}^2) \ni a_{i_1 i_2 \cdots i_n} \qquad (i_1, \cdots, i_n = 1,\ 2,\ \text{対称})$$

この空間には群 $GL(2, \mathrm{C})$ が作用している.

$\Longrightarrow$

p 次同次多項式の空間 $S^p(S^n(\mathrm{C}^2))$ にも作用する.

この作用の下で, 不変な式は何か?あるいは共変式は何か?

生成元は何か?生成元の独立性・従属性は?

$\boldsymbol{n=2}$ のとき，つまり２次形式のときは簡単

$\boldsymbol{S^p(S^n(\mathrm{C}^2))}$ の $\boldsymbol{GL(2,\mathrm{C})}$-既約な不変部分空間

$\Longleftrightarrow$ (１対１対応)

Schur 関数 $\boldsymbol{S_{ab}\ (a \geq b \geq 0,\ a+b=pn)}$

$\boldsymbol{n=2}$ のとき，

$$\boldsymbol{S^1(S^2(\mathrm{C}^2)) = \underline{S_2}}$$
$$\boldsymbol{S^2(S^2(\mathrm{C}^2)) = S_4 + \underline{S_{22}}}$$
$$\boldsymbol{S^3(S^2(\mathrm{C}^2)) = S_6 + S_{42}}$$
$$\boldsymbol{S^4(S^2(\mathrm{C}^2)) = S_8 + S_{62} + S_{44}}$$

一般に，

$$S^p(S^2(\mathrm{C}^2)) = S_{2p} + S_{2p-2,2} + S_{2p-4,4} + \cdots$$

生成元は

$$S_2 \subset S^1(S^2(\mathrm{C}^2)), \quad S_{22} \subset S^2(S^2(\mathrm{C}^2))$$

の二つ．例えば，

$S^4(S^2(\mathrm{C}^2)) \supset S_{62}$ は

$$S_{62} = S_2 \times S_2 \times S_{22}$$

具体的な式で

$$S^2(\mathrm{C}^2) = S_2 = \{a_{11}{x_2}^2 - 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}{x_1}^2\}$$

a_{11}，a_{12}，a_{22} がこの空間の座標で, a_{11} が S_2 の生成元.

群 $GL(2, \mathrm{C})$ の $S^2(\mathrm{C}^2)$ への作用は

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &a_{11}{x_2}^2 - 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}{x_1}^2 \\ &= a'_{11}{x'_2}^2 - 2a'_{12}x'_1x'_2 + a'_{22}{x'_1}^2 \end{aligned}$$

とすると，

$$\begin{pmatrix} a'_{11} \\ a'_{12} \\ a'_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{(ad-bc)^2} \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad+bc & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

$$a_{11}a_{22} - {a_{12}}^2 = (ad-bc)^2(a'_{11}a'_{22} - {a'_{12}}^2)$$

$$S^2(S^2(\mathrm{C}^2)) = S_4 + S_{22}$$

S_4 の生成元　：$a_{11}{}^2$

S_{22} の生成元　：$a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2$

これは $GL(2, \mathrm{C})$-不変式

(判別式は重さ 2 の相対不変式)

不変式：　S_{aa}

共変式：　S_{ab} $(a > b)$

３次形式は少し難しい

$n = 3$ のとき,

$$
\begin{aligned}
S^1(S^3(\mathrm{C}^2)) &= \underline{S_3} \\
S^2(S^3(\mathrm{C}^2)) &= S_6 + \underline{S_{42}} \\
S^3(S^3(\mathrm{C}^2)) &= S_9 + S_{72} + \underline{S_{63}} \\
S^4(S^3(\mathrm{C}^2)) &= S_{12} + S_{10,2} + S_{93} + S_{84} + \underline{S_{66}} \\
S^5(S^3(\mathrm{C}^2)) &= S_{15} + S_{13,2} + S_{12,3} + S_{11,4} + S_{10,5} \\
&\quad + S_{96} \\
S^6(S^3(\mathrm{C}^2)) &= S_{18} + S_{16,2} + S_{15,3} + S_{14,4} + S_{13,5} \\
&\quad + 2S_{12,6} + S_{10,8}
\end{aligned}
$$

生成元

$$S_3 \quad : \quad f = a_{111}$$

$$S_{42} \quad : \quad h = a_{111}a_{122} - {a_{112}}^2$$

$$S_{63} \quad : \quad j = {a_{111}}^2 a_{222} - 3a_{111}a_{112}a_{122} + 2{a_{112}}^3$$

$$S_{66} \quad : \quad d = {a_{111}}^2 {a_{222}}^2 - 6a_{111}a_{112}a_{122}a_{222}$$
$$+4a_{111}{a_{122}}^3 + 4{a_{112}}^3 a_{222} - 3{a_{112}}^2 {a_{122}}^2$$

微分方程式 ： ${z_2}^2 z_5 - 3z_2z_3z_4 + 2{z_3}^3 = 0 \quad$!!!

微分方程式と j のかたちが同じ.

これは偶然の一致だろうか???

ちなみに, 分母の $\boldsymbol{F = z_2 z_4 - {z_3}^2}$ は

$$\boldsymbol{h = a_{111} a_{122} - {a_{112}}^2}$$

に一致する.

次は３次曲線のODE

２次曲線と同様に計算．結果は膨大な長さの式になる．
同じ記号を使って，

$$
\begin{aligned}
&z_9z_7z_5z_2^7-3z_9z_7z_4z_3z_2^6+2z_9z_7z_3^3z_2^5-z_9z_6^2z_2^7\\
&+3z_9z_6z_5z_3z_2^6+4z_9z_6z_4^2z_2^6-5z_9z_6z_4z_3^2z_2^5\\
&-5z_9z_5^2z_4z_2^6-z_9z_5^2z_3^2z_2^5+14z_9z_5z_4^2z_3z_2^5\\
&-10z_9z_5z_4z_3^3z_2^4+4z_9z_5z_3^5z_2^3-4z_9z_4^4z_2^5\\
&-5z_9z_4^3z_3^2z_2^4+15z_9z_4^2z_3^4z_2^3-12z_9z_4z_3^6z_2^2\\
&+3z_9z_3^8z_2-z_8^2z_5z_2^7+3z_8^2z_4z_3z_2^6-2z_8^2z_3^3z_2^5\\
&+2z_8z_7z_6z_2^7-3z_8z_7z_5z_3z_2^6-4z_8z_7z_4^2z_2^6\\
&+5z_8z_7z_4z_3^2z_2^5-3z_8z_6^2z_3z_2^6+2z_8z_6z_5z_4z_2^6
\end{aligned}
$$

$$+7z_8z_6z_5{z_3}^2{z_2}^5 - 14z_8z_6{z_4}^2z_3{z_2}^5 + 15z_8z_6z_4{z_3}^3{z_2}^4$$
$$-6z_8z_6{z_3}^5{z_2}^3 + 5z_8{z_5}^3{z_2}^6 - 18z_8{z_5}^2z_4z_3{z_2}^5$$
$$+5z_8{z_5}^2{z_3}^3{z_2}^4 + 6z_8z_5{z_4}^3{z_2}^5 + 15z_8z_5{z_4}^2{z_3}^2{z_2}^4$$
$$-20z_8z_5z_4{z_3}^4{z_2}^3 + 6z_8z_5{z_3}^6{z_2}^2 + 10z_8{z_4}^4z_3{z_2}^4$$
$$-30z_8{z_4}^3{z_3}^3{z_2}^3 + 27z_8{z_4}^2{z_3}^5{z_2}^2 - 6z_8z_4{z_3}^7z_2$$
$$-z_8{z_3}^9 - {z_7}^3{z_2}^7 + 3{z_7}^2z_6z_3{z_2}^6 + 8{z_7}^2z_5z_4{z_2}^6$$
$$-5{z_7}^2z_5{z_3}^2{z_2}^5 - 5{z_7}^2z_4{z_3}^3{z_2}^4 + 2{z_7}^2{z_3}^5{z_2}^3$$
$$-5z_7{z_6}^2z_4{z_2}^6 - z_7{z_6}^2{z_3}^2{z_2}^5 - 10z_7z_6{z_5}^2{z_2}^6$$
$$+8z_7z_6z_5z_4z_3{z_2}^5 + 10z_7z_6{z_4}^3{z_2}^5 - 10z_7z_6z_4{z_3}^4{z_2}^3$$
$$+6z_7z_6{z_3}^6{z_2}^2 + 10z_7{z_5}^3z_3{z_2}^5 - 6z_7{z_5}^2{z_4}^2{z_2}^5$$
$$+5z_7{z_5}^2z_4{z_3}^2{z_2}^4 - 10z_7{z_5}^2{z_3}^4{z_2}^3 - 40z_7z_5{z_4}^3z_3{z_2}^4$$
$$+40z_7z_5{z_4}^2{z_3}^3{z_2}^3 + 12z_7z_5z_4{z_3}^5{z_2}^2 - 12z_7z_5{z_3}^7z_2$$
$$+30z_7{z_4}^4{z_3}^2{z_2}^3 - 45z_7{z_4}^3{z_3}^4{z_2}^2 + 12z_7{z_4}^2{z_3}^6z_2$$
$$+3z_7z_4{z_3}^8 + 5{z_6}^3z_5{z_2}^6 + 10{z_6}^3z_4z_3{z_2}^5 - 5{z_6}^3{z_3}^3{z_2}^4$$

$$
\begin{aligned}
&-10z_6^2z_5^2z_3z_2^5-20z_6^2z_5z_4^2z_2^5-10z_6^2z_5z_4z_3^2z_2^4\\
&+20z_6^2z_5z_3^4z_2^3+10z_6^2z_4^3z_3z_2^4-10z_6^2z_4^2z_3^3z_2^3\\
&+6z_6^2z_4z_3^5z_2^2-6z_6^2z_3^7z_2+20z_6z_5^3z_4z_2^5\\
&-5z_6z_5^3z_3^2z_2^4+10z_6z_5^2z_4^2z_3z_2^4+20z_6z_5^2z_4z_3^3z_2^3\\
&-30z_6z_5^2z_3^5z_2^2+10z_6z_5z_4^4z_2^4-10z_6z_5z_4^3z_3^2z_2^3\\
&-45z_6z_5z_4^2z_3^4z_2^2+42z_6z_5z_4z_3^6z_2+3z_6z_5z_3^8\\
&-30z_6z_4^5z_3z_2^3+60z_6z_4^4z_3^3z_2^2-24z_6z_4^3z_3^5z_2\\
&-6z_6z_4^2z_3^7-6z_5^5z_2^5+10z_5^4z_4z_3z_2^4-10z_5^3z_4^3z_2^4\\
&-50z_5^3z_4^2z_3^2z_2^3+30z_5^3z_4z_3^4z_2^2+10z_5^3z_3^6z_2\\
&+50z_5^2z_4^4z_3z_2^3+30z_5^2z_4^3z_3^3z_2^2-54z_5^2z_4^2z_3^5z_2\\
&-6z_5^2z_4z_3^7-5z_5z_4^6z_2^3-60z_5z_4^5z_3^2z_2^2\\
&+45z_5z_4^4z_3^4z_2+10z_5z_4^3z_3^6+15z_4^7z_3z_2^2\\
&-10z_4^6z_3^3z_2-3z_4^5z_3^5=0
\end{aligned}
$$

特徴

- 同次１０次式
- 係数の和＝$\mathbf{0}$
- 添字の和＝$\mathbf{35}$ で一定　$\mathbf{(}$微分の回数の和$\mathbf{)}$
- $\boldsymbol{z_2} \sim \boldsymbol{z_9}$ が使われている $\boldsymbol{(z_1}$ は現れない$\mathbf{)}$

これに対応する不変式，共変式は存在するのか?

$$z_2 \Longleftrightarrow a_{11\cdots 11}$$

$$z_3 \Longleftrightarrow a_{11\cdots 12}$$

$$z_4 \Longleftrightarrow a_{11\cdots 22}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$z_9 \Longleftrightarrow a_{22\cdots 22}$$

となるためには，添字は７個でなくてはいけない．

次数は１０なので，$S^{10}(S^7(\mathbf{C}^2))$ の元となる．

添字に現れる $\mathbf{1}$ と $\mathbf{2}$ の個数

最初の項 $\boldsymbol{z_9 z_7 z_5 {z_2}^7}$

$\Longleftrightarrow \boldsymbol{a_{2222222} a_{1122222} a_{1111222} {a_{1111111}}^7}$

$\mathbf{1}$ が５５個, $\mathbf{2}$ が１５個．他の項で数えても, 同じ数値になる．従って, もし対応物があるなら

$\Longrightarrow \boldsymbol{S_{55,15} \subset S^{10}(S^7(\mathbf{C}^2))}$ となる.

この既約空間 $\boldsymbol{S_{55,15}}$ の重複度は２１．その中に確かに該当するものがある!

k 次曲線のODE

$k=1$ のとき $\quad a_1x+y=0$

$$\Longrightarrow y''=0$$

$$\Longrightarrow z_2=0$$

$$\Longrightarrow a=0\in S^0(\mathrm{C}^2)$$

(添字なし)

$k=2$ のとき $z_2\sim z_5\Longrightarrow a_{111}\sim a_{222}\in S^3(\mathrm{C}^2)$

$k=3$ のとき $z_2\sim z_9\Longrightarrow a_{1111111}\sim a_{2222222}$

$$\in S^7(\mathrm{C}^2)$$

$\boldsymbol{k}$ 次曲線のODE

$$\boldsymbol{k = 1 \ : \ S^{1}(S^{0}(\mathrm{C}^{2})) \supset S_{00}}$$

$$\boldsymbol{k = 2 \ : \ S^{3}(S^{3}(\mathrm{C}^{2})) \supset S_{63}}$$

$$\boldsymbol{k = 3 \ : \ S^{10}(S^{7}(\mathrm{C}^{2})) \supset S_{55,15}}$$

$$\boldsymbol{k = 4 \ : \ S^{20}(S^{12}(\mathrm{C}^{2})) \supset S_{195,45}}$$

$$\boldsymbol{k = 5 \ : \ S^{35}(S^{18}(\mathrm{C}^{2})) \supset S_{525,105}}$$

k 次曲線のODE

$\frac{1}{2}k(k+3)$-階のODE

$S^p(S^q(\mathbf{C}^2)) \supset S_{r,s}$

$q = \frac{1}{2}(k-1)(k+4) = \frac{1}{2}k(k+3) - 2$

p, r =?

$s = \frac{1}{8}k(k+1)(k+2)(k-1)$??

別の視点から

- **ODE＝曲線が k-次曲線となるためのobstruction**
- 逆に, $S^p(S^q(\mathrm{C}^2))$ の不変式・共変式の生成元に対応する微分方程式には何かの意味がある?

例えば, $S^2(S^4(\mathrm{C}^2)) \supset S_{88}$

$$a_{1111}a_{2222} - 4a_{1112}a_{1222} + 3{a_{1122}}^2$$

$$\Longleftrightarrow z_2 z_6 - 4z_3 z_5 + 3{z_4}^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow 2uu^{(4)} - 16u'u''' + 15u''^2 = 0$$

$$(u = y'')$$

課題

- 式の構造・性質
  (行列式のような理解はできないものか)

- k-次曲線において, (長い) 式はともかくとして, せめて指標だけでも求まらないか?

- 計算なしに証明する方法 (微分方程式を導く方法) はないか?

- 曲面の場合は?

追記　(３月１４日)

「話の発端」で紹介した文章の続きに,

Fubini then showed that the higher-dimensional smooth quadric hypersurfaces are characterized by a third-order system of PDE.

とある. 曲線のときと同様にして, $\boldsymbol{R^3}$ 内の２次曲面

$$\boldsymbol{a_1x^2+a_2y^2+z^2+a_3xy+a_4xz+a_5yz} \\ \boldsymbol{+a_6x+a_7y+a_8z+a_9=0}$$

の満たす偏微分方程式を求めてみた. $(\boldsymbol{z=z(x,y)})$

その結果は

$$3{z_{xx}}^2 z_{xyy} - z_{xx} z_{yy} z_{xxx} - 6 z_{xx} z_{xy} z_{xxy} + 4 {z_{xy}}^2 z_{xxx} = 0$$

$${z_{xx}}^2 z_{yyy} - 3 z_{xx} z_{yy} z_{xxy} + 2 z_{xy} z_{yy} z_{xxx} = 0$$

$${z_{yy}}^2 z_{xxx} - 3 z_{xx} z_{yy} z_{xyy} + 2 z_{xx} z_{xy} z_{yyy} = 0$$

$$3{z_{yy}}^2 z_{xxy} - z_{xx} z_{yy} z_{yyy} - 6 z_{xy} z_{yy} z_{xyy} + 4 {z_{xy}}^2 z_{yyy} = 0$$

となる. 確かに３階のPDEである.

さて, これの表現論的対応物は何であろうか?