リー環の定義方程式・不変量と幾何構造
— 低次元の場合 —

阿賀岡 芳夫(広島大学)　　2017年3月7日

– Typeset by FoilTEX –

目標

- リー環の同型類を確定する方法

  $\Longrightarrow$ リー環の不変量を導入

- リー環の成す代数的集合を既約分解
- 左不変な幾何構造との関係

今日は主に４次元リー環の話をしたい

が，まず３次元の話から

３次元の場合の結論

次の３つのものが分かれば，３次元複素リー環 $\mathfrak{g}$ の同型類は一意的に確定する

- dim $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$
- $\mathfrak{g}$ は双曲リー環か?
- 田崎-梅原 不変量 $\chi(\mathfrak{g})$

３次元複素リー環の分類表

	非自明な［ ， ］
L_0	
L_1	$[X_1, X_2] = X_3$
L_2	$[X_1, X_2] = X_2,\ [X_1, X_3] = X_3$
$L_3(\alpha)$	$[X_1, X_2] = X_2,\ [X_1, X_3] = X_2 + \alpha X_3$
L_4	$[X_1, X_2] = X_2,\ [X_1, X_3] = -X_3,$ $[X_2, X_3] = X_1$

Remarks

- $L_3(\alpha) \cong L_3(\beta) \iff \alpha = \beta$ or $\alpha\beta = 1$

- $L_3(\alpha) \cong \ [Y_1, Y_2] = Y_2,\ [Y_1, Y_3] = \alpha Y_3$

  $(\alpha \neq 1)$

- $L_3(1) \cong \ [Y_1, Y_2] = Y_2,\ [Y_1, Y_3] = Y_2 + Y_3$

- $L_2 \quad \cong \ [Y_1, Y_2] = Y_2,\ [Y_1, Y_3] = Y_3$

双曲リー環

$\mathfrak{g}$ が双曲リー環 $\iff [X,Y] = \varphi(X)Y - \varphi(Y)X$

$$^{\exists}\varphi \in \mathfrak{g}^*,\ ^{\forall}X,\ Y \in \mathfrak{g}$$

名前の由来：(実のカテゴリーで) $\mathfrak{g}$ をリー環にもつリー群上の左不変計量が全て双曲空間と局所等長 $\iff$ $\mathfrak{g}$ が双曲リー環

(Lauret (2003), 児玉-高原-田丸 (2011))

田崎-梅原 不変量 $\chi(\mathfrak{g})$ (1992)

$X \in \mathfrak{g}$ に対して，$\mathrm{ad}(X) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ の固有値を 0, ε_1, ε_2 とする.

$X \in \mathfrak{g}$ が generic ならば

$$\frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$$

は X の取り方に依存しない.

この値を, 田崎-梅原 不変量と呼び, $\chi(\mathfrak{g})$ と表す.

同型の判定

同型類を定めるときの一つの目安は $\dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$

$\dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{3}$
	L_0	L_1	L_2	L_4
		$L_3(0)$	$L_3(\alpha)$ $(\alpha \neq 0)$	

L_0 と L_4 はこれで決定

田崎-梅原 不変量 $\chi(\mathfrak{g})$ の値が不定値

$$\iff \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0 \quad \text{(nilpotent)}$$

$$\iff \mathfrak{g} \cong L_0,\ L_1$$

これで $L_3(0)$ と L_1 も確定

$L_3(0)$ については $\mathrm{ad}X$ の固有値は $0,\ 0,\ *(\neq 0)$
なので $\chi(L_3(0)) = \infty$

残るは, L_2 と $L_3(\alpha)$ $(\alpha \neq 0)$ の判別のみ

	$\chi(\mathfrak{g})$
L_2	4
$L_3(0)$	∞
$L_3(\alpha)$ $(\alpha \neq 0)$	$\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha}$
L_4	0

$$\chi(L_3(\alpha)) = \chi(L_3(\beta)) \Longleftrightarrow \alpha = \beta \text{ or } \alpha\beta = 1$$

$$\Longleftrightarrow L_3(\alpha) \cong L_3(\beta)$$

$$\chi(L_3(\alpha)) = 4\ (= \chi(L_2)) \iff \alpha = 1$$

不変量では L_2 と $L_3(1)$ の区別がつかない!

- L_2 は双曲リー環だが, $L_3(1)$ はそうではない

$\Longrightarrow$ これで L_2 と $L_3(1)$ も確定

(３次元リー環で双曲リー環となるのは L_2 のみ)

結論(再掲)

次の３つのものが分かれば，３次元複素リー環 $\mathfrak{g}$ の同型類は一意的に確定する

- dim $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$
- $\mathfrak{g}$ は双曲リー環か?
- 田崎-梅原 不変量 $\chi(\mathfrak{g})$

$\chi(\mathfrak{g})$ はリー環のモジュライ空間の局所座標

$\chi(\mathfrak{g})$ の値でリー環の区別がつけられないとはどういうことか?

$\Longrightarrow$

リー環の「退化」が起こっている

ここらの状況全般を理解するために $\cdots\cdots$

リー環全体の集合を考える

リー環を定める $\Longleftrightarrow$ $[\ ,\ ]$ を与える

$\Longleftrightarrow$ c_{ij}^k を与える

ただし, $\mathfrak{g} = \langle e_1, \cdots, e_n \rangle$, $[e_i, e_j] = \sum c_{ij}^k e_k$,

$$\sum_l (c_{ij}^l c_{lk}^m + c_{jk}^l c_{li}^m + c_{ki}^l c_{lj}^m) = 0 \quad \text{(Jacobi律)}$$

n 次元リー環の集合

同型であっても c_{ij}^k の値が少しでも異なるリー環は別のリー環とみなすことにする

$\mathcal{L}_n = n$ 次元リー環の集合

$$= \{(c_{ij}^k) \mid \text{Jacobi 律を満たす}\} \subset \wedge^2 V^* \otimes V$$

ただし，$V = \mathbb{C}^n$

$\mathcal{L}_n$ は $\wedge^2 V^* \otimes V$ 内の代数的集合

３次元の場合

$(\boldsymbol{c^1_{12}},\ \boldsymbol{c^2_{12}},\ \boldsymbol{c^3_{12}},\ \boldsymbol{c^1_{13}},\ \boldsymbol{c^2_{13}},\ \boldsymbol{c^3_{13}},\ \boldsymbol{c^1_{23}},\ \boldsymbol{c^2_{23}},\ \boldsymbol{c^3_{23}})$ の９文字を座標とする空間 C^9 において，３つの２次式

$$c^1_{12}\,c^1_{13} - c^1_{13}\,c^1_{12} + c^2_{12}\,c^1_{23} - c^2_{23}\,c^1_{12} - c^3_{23}\,c^1_{13} + c^3_{13}\,c^1_{23} = 0$$
$$c^1_{12}\,c^2_{13} - c^1_{13}\,c^2_{12} + c^2_{12}\,c^2_{23} - c^2_{23}\,c^2_{12} - c^3_{23}\,c^2_{13} + c^3_{13}\,c^2_{23} = 0$$
$$c^1_{12}\,c^3_{13} - c^1_{13}\,c^3_{12} + c^2_{12}\,c^3_{23} - c^2_{23}\,c^3_{12} - c^3_{23}\,c^3_{13} + c^3_{13}\,c^3_{23} = 0$$

で定まる代数的集合が $\mathcal{L}_3$

大切な点

- $\mathcal{L}_n$ には群 $GL(n, \mathrm{C})$ が作用している

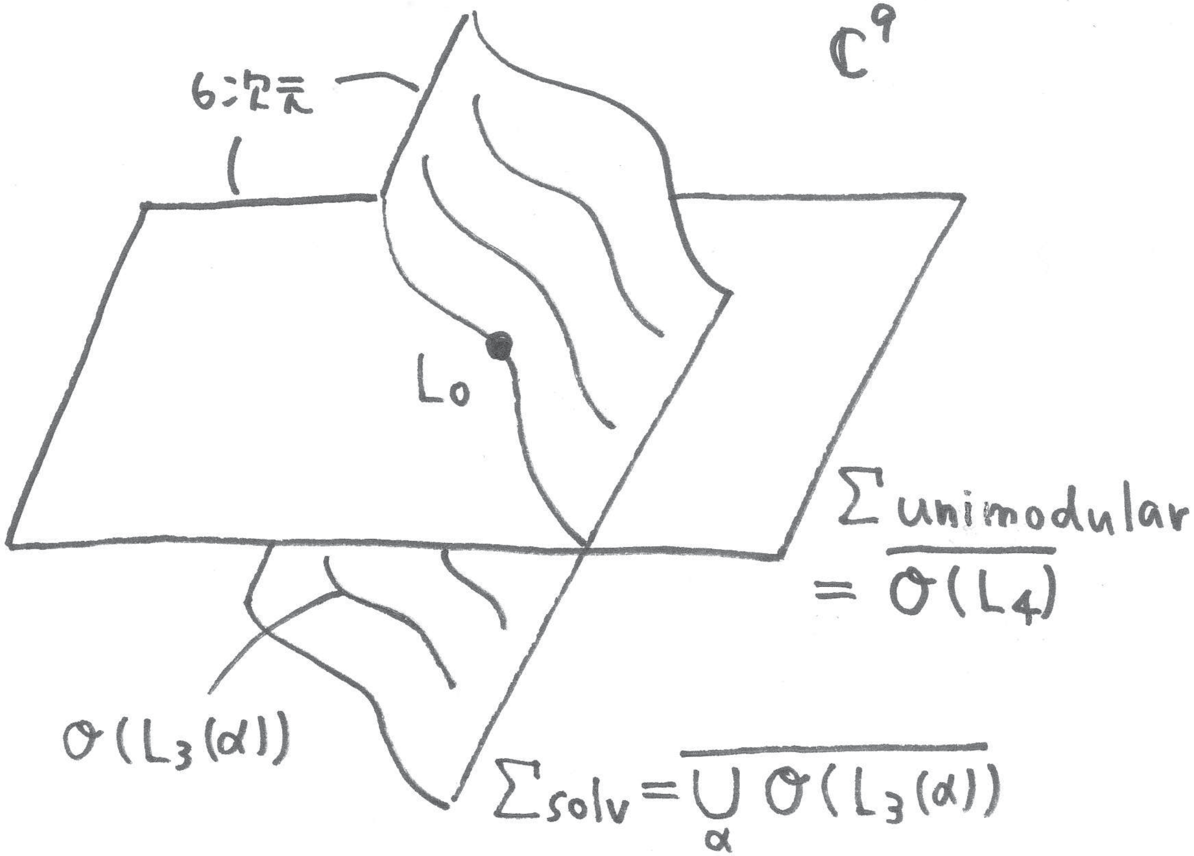
- $GL(n, \mathrm{C})$ の群作用 $\Longleftrightarrow$ C^n の基底変換

- $\mathcal{L}_n$ の２つの点(つまり２つのリー環)が同じ orbit 上にある

  $\Longleftrightarrow$ この２つのリー環は同型

- リー環の分類 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{L}_n$ の $GL(n, \mathrm{C})$-orbit 分解

３次元の場合の模式図



$\mathbb{C}^9$
6次元
L_0
$\Sigma_{unimodular} = \overline{\mathcal{O}(L_4)}$
$\mathcal{O}(L_3(\alpha))$
$\Sigma_{solv} = \overline{\bigcup_{\alpha} \mathcal{O}(L_3(\alpha))}$

リー環の退化

$\mathfrak{g}_1$ が $\mathfrak{g}_2$ に退化する

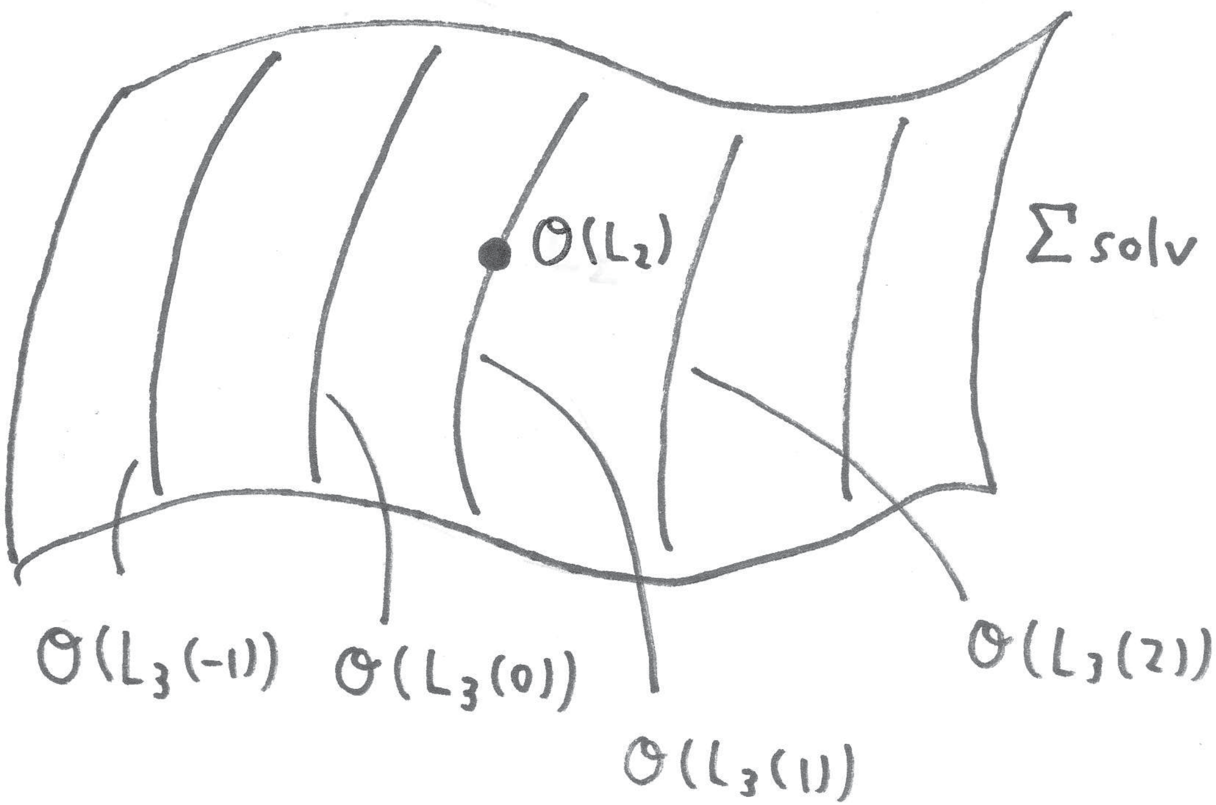
$\Longleftrightarrow \mathfrak{g}_2 \notin \mathcal{O}(\mathfrak{g}_1)$ だが $\mathfrak{g}_2 \in \overline{\mathcal{O}(\mathfrak{g}_1)}$ となるとき

ただし, $\mathcal{O}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \in \mathcal{L}_n$ を通る $GL(n, \mathrm{C})$-orbit

$\overline{\mathcal{O}(\mathfrak{g}_1)} = \mathcal{O}(\mathfrak{g}_1)$ の(通常の意味での)閉包

このとき　$\chi(\mathfrak{g}_1) = \chi(\mathfrak{g}_2)$

L_2 は $L_3(1)$ が退化したリー環



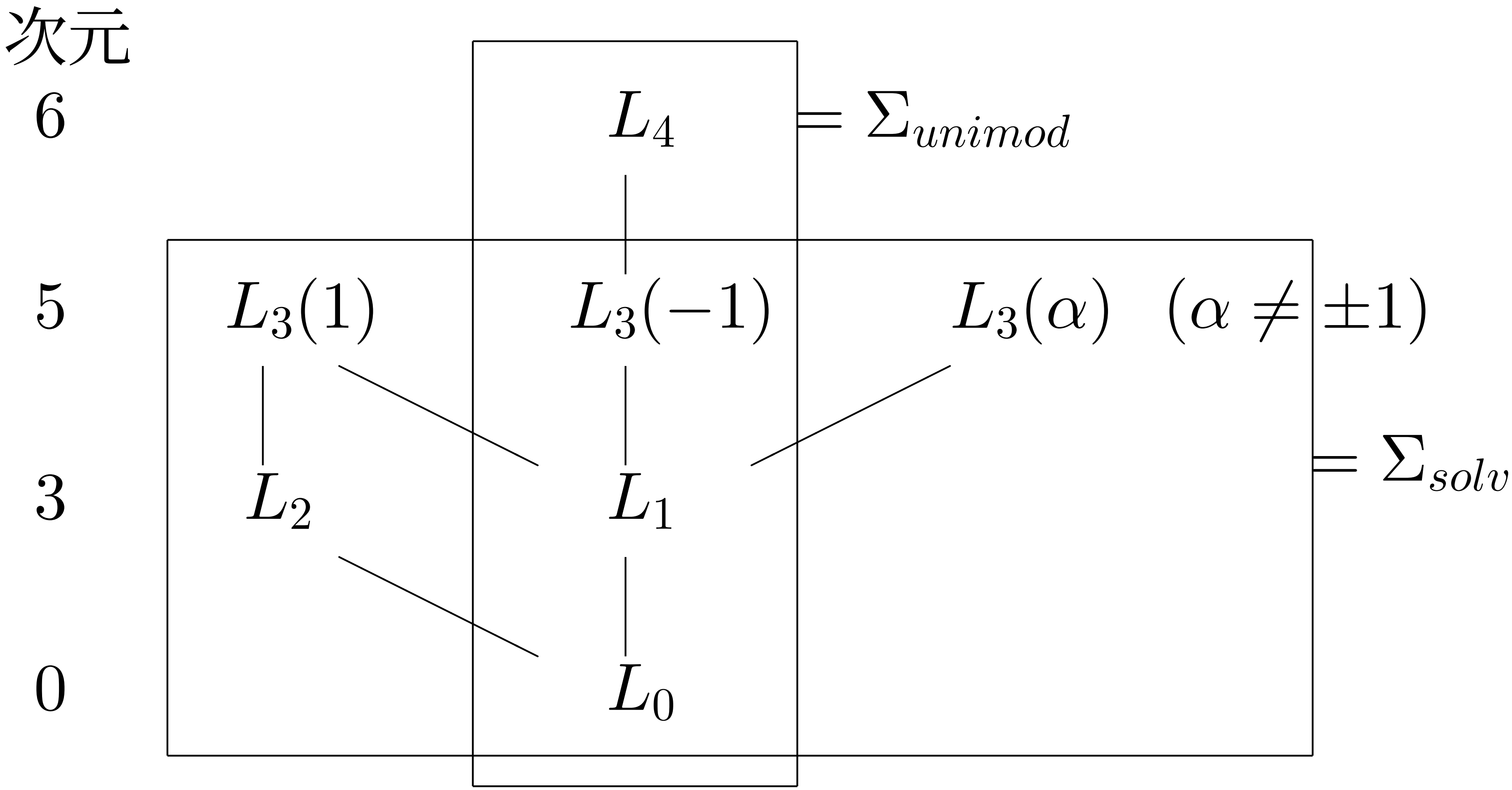
退化のかたち

$\mathfrak{g}_t$ ：$[e_1, e_2] = e_2,\ [e_1, e_3] = te_2 + e_3,\ [e_2, e_3] = 0$

とおくと

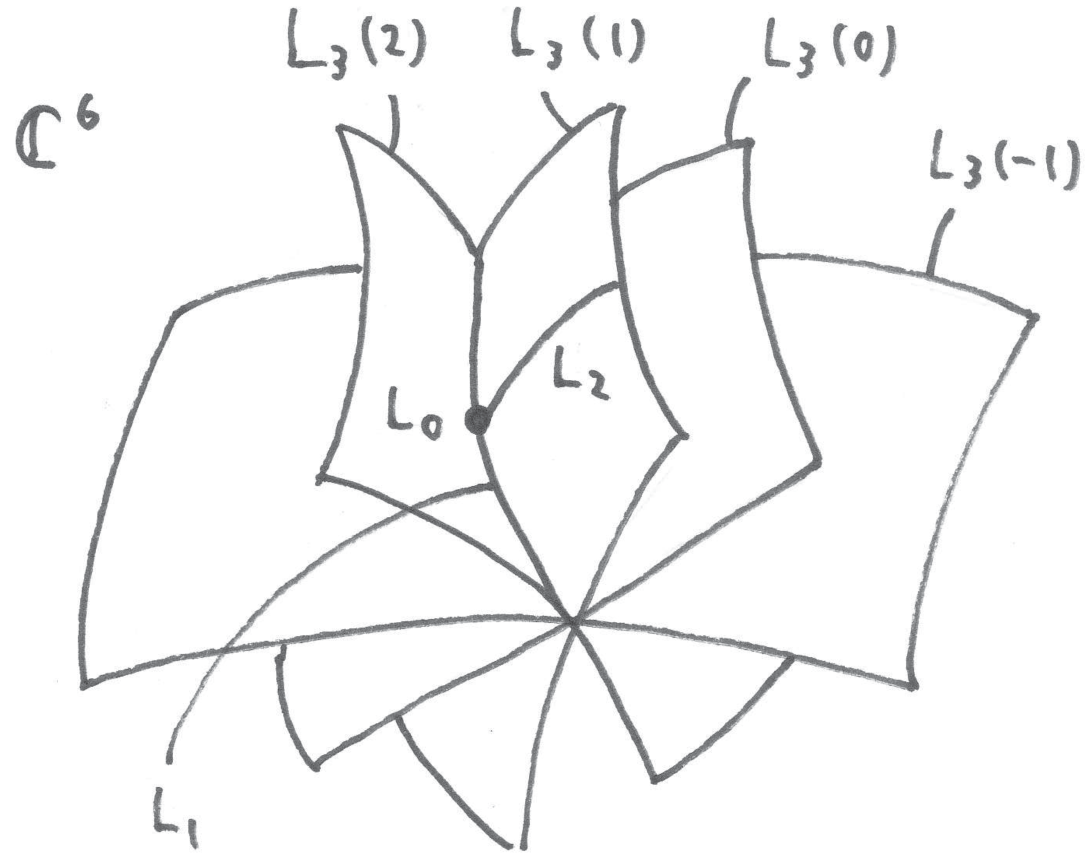
$$\mathfrak{g}_t \cong \begin{cases} L_3(1) & (t \neq 0) \\ L_2 & (t = 0) \end{cases}$$

３次元の場合の模式図



次元
6
5
3
0
L_4
$= \Sigma_{unimod}$
$L_3(1)$
$L_3(-1)$
$L_3(\alpha) \quad (\alpha \neq \pm 1)$
$= \Sigma_{solv}$
L_2
L_1
L_0

Σ_{solv} の様子



問題

次のリー環は，分類表の中のどのリー環に同型か?

$$[e_1, e_2] = 190\,e_1 - 74\,e_2 - 12\,e_3$$

$$[e_1, e_3] = 647\,e_1 - 145\,e_2 - 102\,e_3$$

$$[e_2, e_3] = 629\,e_1 - 31\,e_2 - 162\,e_3$$

$$7[e_1, e_2] - 4[e_1, e_3] + 2[e_2, e_3] = 0$$

なので, $\dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 2$

また, $[e_1, e_2] \notin \langle e_1, e_2 \rangle$ なので, 双曲リー環 L_2 ではない

従って $L_3(\alpha)$ $(\alpha \neq 0)$ のいずれかに同型

$$\Longrightarrow$$

$\chi(\mathfrak{g})$ を計算する

不変量は

$$\chi(\mathfrak{g}) = \frac{2(\mathrm{Tr}\ \mathrm{ad}\ X)^2}{(\mathrm{Tr}\ \mathrm{ad}\ X)^2 - \mathrm{Tr}\ (\mathrm{ad}\ X)^2}$$

と表せる. $X = a\,e_1 + b\,e_2 + c\,e_3$ とすると

$$\mathrm{ad}X = \begin{pmatrix} -190b - 647c & 190a - 629c & 647a + 629b \\ 74b + 145c & -74a + 31c & -145a - 31b \\ 12b + 102c & -12a + 162c & -102a - 162b \end{pmatrix}$$

従って

$$\mathrm{Tr}\ \ \mathrm{ad}\ \ X = -88(2a + 4b + 7c)$$

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}\ \ X)^2 = 4840(2a + 4b + 7c)^2$$ だから

$$\chi(\mathfrak{g}) = \frac{2 \cdot 88^2}{88^2 - 4840} = \frac{16}{3}$$

方程式 $\dfrac{(\alpha + 1)^2}{\alpha} = \dfrac{16}{3}$ を解くと, $\alpha = 3,\ \dfrac{1}{3}$

よって, $\mathfrak{g} \cong L_3(3)\ (\cong L_3(1/3))$

4 次元の場合 (分類表)

	非自明な [,]
M_0	
M_1	$[X_1, X_2] = X_3$
M_2	$[X_1, X_2] = X_3,\ \ [X_1, X_3] = X_4$
M_3	$[X_1, X_2] = X_2,\ \ [X_1, X_3] = X_3,\ \ [X_1, X_4] = X_4$
$M_4(\alpha)$	$[X_1, X_2] = X_2,\ \ [X_1, X_3] = X_3,\ \ [X_1, X_4] = X_3 + \alpha X_4$
$M_4(\infty)$	$[X_1, X_2] = X_2$
M_5	$[X_1, X_2] = X_2,\ \ [X_1, X_3] = X_3,\ \ [X_1, X_4] = 2X_4,\ \ [X_2, X_3] = X_4$
M_6	$[X_1, X_2] = X_2,\ \ [X_1, X_3] = -X_3,\ \ [X_2, X_3] = X_1$
$M_7(\alpha, \beta)$	$[X_1, X_2] = X_2,\ \ [X_1, X_3] = X_2 + \alpha X_3,\ \ [X_1, X_4] = X_3 + \beta X_4$
$M_8(\alpha)$	$[X_1, X_2] = X_2,\ \ [X_1, X_3] = X_2 + \alpha X_3,\ \ [X_1, X_4] = (\alpha + 1)X_4,\ \ [X_2, X_3] = X_4$
M_9	$[X_1, X_2] = X_2,\ \ [X_3, X_4] = X_4$

同型に関する注意

$$M_6 \cong \mathfrak{gl}(2, \mathrm{C})$$

$$M_9 \cong \mathfrak{r}_2(\mathrm{C}) \oplus \mathfrak{r}_2(\mathrm{C}), \quad \mathfrak{r}_2(\mathrm{C}) : [X_1, X_2] = X_2$$

$$M_4(\alpha) \cong M_4(\alpha') \Longleftrightarrow \alpha = \alpha'$$

$$M_7(\alpha, \beta) \cong M_7(\alpha', \beta')$$

$\Longleftrightarrow$ ２つの比 $1 : \alpha : \beta$ と $1 : \alpha' : \beta'$ が順序を除いて一致

$$M_8(\alpha) \cong M_8(\alpha') \Longleftrightarrow \alpha = \alpha' \quad \text{or} \quad \alpha\alpha' = 1$$

基本的には３次元の場合と似ている

- $\mathcal{L}_4$ は４つの既約代数多様体の和集合
- 独立な不変量は２つ
- 同型類を定めるのに必要な概念は５種類

4つの variety $\Sigma_1 \sim \Sigma_4$

$$
\begin{array}{ccc}
\textbf{次元} & & \\
\mathbf{12} & M_6 & \\
 & | & \\
\mathbf{11} & M_8(-1) & \\
 & | & \\
\mathbf{10} & M_7(-1,0) & \Sigma_1 \\
 & | & \\
\mathbf{9} & M_2 & \\
 & | & \\
\mathbf{6} & M_1 & \\
 & | & \\
\mathbf{0} & M_0 &
\end{array}
$$

次元

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathbf{10} & M_7(1,1) \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & M_7(\alpha,\beta)\ \begin{pmatrix}\alpha\neq\beta\\ \alpha,\beta\neq 1\end{pmatrix} \arrow[d, dash] & M_7(\alpha,1)\ \begin{pmatrix}\alpha\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}\\ \alpha\neq 1\end{pmatrix} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \\
\mathbf{9} & & M_2 \arrow[dd, dash] & \\
\mathbf{8} & M_4(1) \arrow[dr, dash] \arrow[dd, dash] & & M_4(\alpha)\ \begin{pmatrix}\alpha\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}\\ \alpha\neq 1\end{pmatrix} \arrow[dl, dash] \\
\mathbf{6} & & M_1 \arrow[dd, dash] & \\
\mathbf{4} & M_3 \arrow[dr, dash] & & \\
\mathbf{0} & & M_0 &
\end{tikzcd}$$

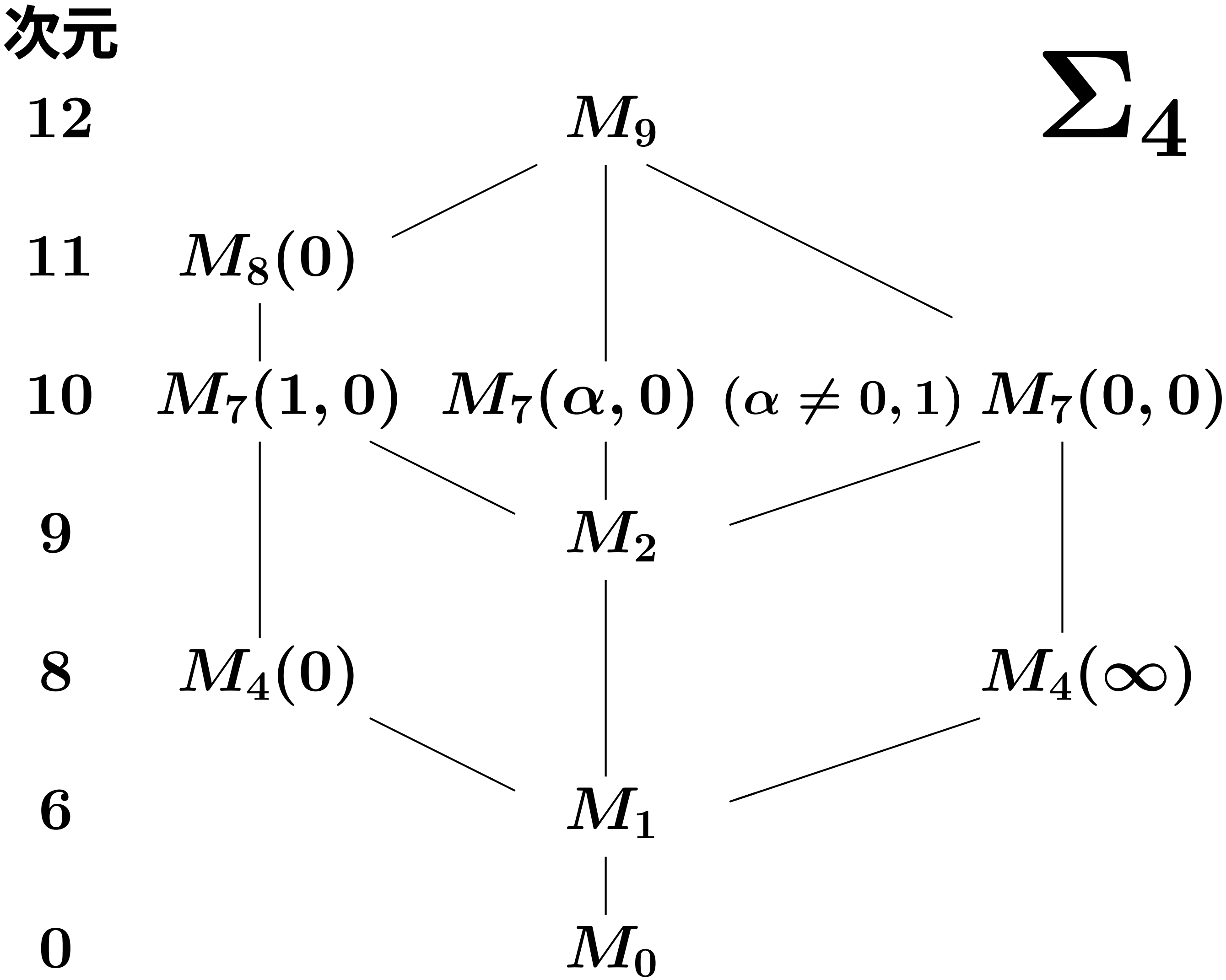
$$\Sigma_2$$

ただし, $M_7(\infty,1)=M_7(0,0)$

次元

$$
\begin{tikzcd}
11 & M_8(0) \arrow[d, dash] & M_8(\alpha) \arrow[d, dash] & (\alpha \neq 0,1) & M_8(1) \arrow[d, dash] \arrow[ddr, dash] & \\
10 & M_7(1,0) \arrow[dd, dash] \arrow[dr, dash] & M_7(\alpha,\alpha+1) \arrow[d, dash] & (\alpha \neq 0,1) & M_7(2,1) \arrow[dd, dash] \arrow[dll, dash] & \\
9 & & M_2 \arrow[dd, dash] & & & M_5 \arrow[dl, dash] \\
8 & M_4(0) \arrow[dr, dash] & & & M_4(2) \arrow[dll, dash] & \\
6 & & M_1 \arrow[d, dash] & & & \\
0 & & M_0 & & &
\end{tikzcd}
$$

$\boldsymbol{\Sigma_3}$


次元
Σ_4
12
M_9
11
$M_8(0)$
10
$M_7(1,0)$
$M_7(\alpha,0)$
$(\alpha \neq 0,1)$
$M_7(0,0)$
9
M_2
8
$M_4(0)$
$M_4(\infty)$
6
M_1
0
M_0

独立な２つの不変量

ad X の固有値を $0,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3$ としたとき

$$\chi_1(\mathfrak{g}) = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2}$$

$$\chi_2(\mathfrak{g}) = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^3}$$

$M_9 \in \Sigma_4$ を除いて，X が generic ならば，比 $0 : \varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \varepsilon_3$ は X の取り方によらない

同型類を定めるのに必要な概念

- dim $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$,　　dim $[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]$
- $\mathfrak{g}$ は双曲リー環か?
- ２つの不変量　$\chi_1(\mathfrak{g}),\ \chi_2(\mathfrak{g})$
- ${}^\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して $X,\ Y,\ [X, Y],\ [X, [X, Y]]$ は１次従属か?
- ${}^\forall \omega \in \mathfrak{g}^*$ に対して $d\omega \wedge d\omega = 0$ か?,　i.e., $d\omega$ は分解可能か? $\longrightarrow$ シンプレクティックと $\cdots$

Remarks

$\mathfrak{g}$ が双曲リー環

$\iff {}^{\exists}\varphi \in \mathfrak{g},\ [X, Y] = \varphi(X)Y - \varphi(Y)X$

$\iff {}^{\forall}X,\ Y$ に対して，$X,\ Y,\ [X, Y]$ が
１次従属

$d\omega \wedge d\omega = 0 \iff$

c_{ij}^{k} の２次多項式 $= 0$ で表される条件

ここから，４次元リー群上の左不変シンプレクティック構造の話

存在する，存在しない？

４次元複素リー群上の左不変なシンプレクティック構造の存在・非存在性について

$\mathfrak{g}$ 上に存在する $\Longleftrightarrow$

$$^{\exists}\Phi \in \wedge^2 \mathfrak{g}^*, \quad d\Phi = 0, \quad \Phi \wedge \Phi \neq 0$$

２つの条件 $d\Phi = 0$, $\Phi \wedge \Phi = 0$ が独立ならば, ほとんどすべてのリー環上にはシンプレクティック構造が存在することになる

($\Phi \wedge \Phi = 0$ はリー環の構造に依存しない条件)

存在しないもののリスト

$$M_3, \quad M_4(\alpha) \;\; (\alpha \neq -1, \infty), \quad M_6,$$

$$M_7(\alpha, \beta) \;\; (\alpha + \beta \neq 0,\ \alpha, \beta \neq -1), \quad M_8(-1)$$

特に,

Σ_1 のほとんどすべて$(= M_6)$

Σ_2 のほとんどすべて$(\fallingdotseq M_7(\alpha, \beta))$

にはシンプレクティック構造は存在しない

だから

$$d\Phi = 0 \quad \text{と} \quad \Phi \wedge \Phi = 0$$

は従属した条件に違いない！

実は，$^\forall \omega \in \mathfrak{g}^*$ に対して $d\omega \wedge d\omega = 0$

$$\iff \mathfrak{g} \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

つまり，$d\omega \wedge d\omega = 0$ は $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ の定義方程式

$$d : \wedge^2\mathfrak{g}^* \longrightarrow \wedge^3\mathfrak{g}^*$$

$\Phi \in \wedge^2\mathfrak{g}^*$ が closed $\Longleftrightarrow$ $\Phi \in$ Ker d

<u>主張</u>　(1) ${}^\forall\mathfrak{g}$ に対して dim Ker $d \geq 3$

(2) $\Sigma_1 \sim \Sigma_4$ の generic な $\mathfrak{g}$ について，
dim Ker $d = 3$

(3) dim Ker $d = 3$ のとき，
$\mathfrak{g}$ 上にシンプレクテック構造が存在 $\Longleftrightarrow$
$\mathfrak{g}$ 上に exact なシンプレクテック構造が存在

これにより,

dim Ker $d = 3$ となる generic な $\mathfrak{g}$ に対しては,

$\mathfrak{g}$ 上にシンプレクティック構造が存在しない

$\Longleftrightarrow \mathfrak{g} \in \boldsymbol{\Sigma}_1 \cup \boldsymbol{\Sigma}_2$

最終的に,

- $\mathfrak{g}$ 上にシンプレクティック構造が存在する

$\Longleftrightarrow$ dim Ker $d = \mathbf{3}$ で $\mathfrak{g} \in (\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{3}} \cup \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{4}}) \backslash (\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{1}} \cup \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{2}})$

または

dim Ker $d \geq 4$

- $\mathfrak{g}$ 上にシンプレクティック構造が存在しない

$\Longleftrightarrow$ dim Ker $d = \mathbf{3}$　かつ　$\mathfrak{g} \in \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{1}} \cup \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{2}}$

命題

$C = \{\Phi \in \wedge^2 \mathfrak{g}^* \mid \Phi \wedge \Phi = 0\}$ とおく (cone)

(1) C が含む最大次元の線形部分空間は３次元

特に dim Ker $d \geq 4$ ならば $\mathfrak{g}$ 上に存在

(2) C が含む３次元の線形部分空間は次のいずれかのタイプ

(I) $\{\omega_1 \wedge \omega_2,\ \omega_1 \wedge \omega_3,\ \omega_2 \wedge \omega_3\}$

(II) $\{\omega_1 \wedge \omega_2,\ \omega_1 \wedge \omega_3,\ \omega_1 \wedge \omega_4\}$

(3) Σ_1 で dim Ker $d=3 \Longrightarrow$ Ker d は (I) 型

Σ_2 で dim Ker $d=3 \Longrightarrow$ Ker d は (II) 型

(4) dim Ker $d \geq 4$

$\Longleftrightarrow \mathfrak{g} \in \overline{\cup_{\alpha\in\mathrm{C}}\,\mathcal{O}(M_7(\alpha,-\alpha))} \cup \overline{\mathcal{O}(M_8(-2))}$

$\Longleftrightarrow \chi_1(\mathfrak{g}) = \chi_2(\mathfrak{g})$ となる $\mathfrak{g}$ の orbit の閉包

$\Longleftrightarrow \varepsilon_i + \varepsilon_j = 0,\ {}^{\exists}i,\ j$

大雑把な結論

各 Σ_i の generic な元に対して，

Σ_1 ：×，Ker d は３次元で I 型

Σ_2 ：×，Ker d は３次元で II 型

Σ_3 ：○，exact な Φ のみ存在

Σ_4 ：○，exact でない Φ も存在

今後の課題

５次元以上の場合には？

$\Longrightarrow$

不変量に関しては，同じようにはゆかない

本質的に，rank $=2$ のリー環が現れて，ad X の固有値比が X に依存する(４次元の M_9 のように)

例えば $\mathfrak{sl}(3, \mathrm{C})$ で,

$$\mathrm{ad}\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & -a-b \end{pmatrix}$$ の固有値は

$$\{\, 0,\ 0,\ \pm(a-b),\ \pm(2a+b),\ \pm(a+2b) \,\}$$

明らかに, 比は $a,\ b$ に依存する

不変量ではないが,

$f_i = \mathsf{Tr}\ (\mathsf{ad}\ X)^i$ とおくと

$$f_1 = f_3 = f_5 = 0$$

$$f_4 = \frac{1}{4}{f_2}^2$$

$$f_8 = -\frac{5}{192}{f_2}^4 + \frac{2}{3}f_2 f_6$$

$\mathfrak{o}(7,\mathrm{C})$ の場合　(２１次元単純リー環)

同じ記号で

$$\boldsymbol{f_8 = \frac{8683}{150000}{f_2}^4 - \frac{543}{500}{f_2}^2 f_4 + \frac{19}{4}{f_4}^2 + \frac{158}{375} f_2 f_6}$$

$\mathfrak{sp}(3,\mathbb{C})$ の場合　(これも，２１次元単純リー環)

同じ記号で

$$f_8 = \frac{2011}{357504}{f_2}^4 - \frac{1815}{14896}{f_2}^2 f_4 + \frac{137}{392}{f_4}^2 + \frac{22}{57}f_2 f_6$$

リー環の違いが係数に現れる

さらに７次元以上のべき零リー環には，一般に変形のパラメータが現れる !!

例えば

$$
\begin{aligned}
&[X_1, X_i] = X_{i-1} \quad (i = 3 \sim 7),\\
&[X_4, X_7] = \alpha X_2, \quad [X_5, X_7] = (\alpha + 1) X_3,\\
&[X_5, X_6] = X_2, \qquad [X_6, X_7] = (\alpha + 1) X_4
\end{aligned}
$$

しかし，ad X の固有値はすべて０!!

変形のパラメータをどうやって取り出せばよいか??

同型類を定めるに必要な概念

- $\dim\ \mathfrak{g}^{(i)}$
- 不変量
- 双曲構造
- シンプレクティック構造

他の幾何構造は？