リーマン多様体の局所等長埋め込みの障害テンソル — 不変式・共変式をどのように表示するか

阿賀岡 芳夫(広島大学)　2016年3月8日

– Typeset by FoilTEX –

テンソルの話をしたい

- 出発点

微分幾何学の問題

$\Longrightarrow$ あるテンソル方程式が解をもつか?

- テンソルをどう処理するか?
  テンソルとどう向かい合うか?

リーマン多様体の等長埋め込み

- (M^n, g)：n 次元リーマン多様体
- k：0 以上の整数

が与えられたとき, 等長埋め込み $f : M^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^{n+k}$ は存在するか?

ここに，f が等長埋め込み $\Longleftrightarrow f^* g_0 = g$

k が十分大ならＯＫ

- $k = \frac{1}{2}n(n-1)$, C^ω 級なら，局所的に存在

- 低い次元に埋め込めるリーマン多様体は特別なリーマン多様体

- それを内在的な量で特徴付けしたい

超曲面 $M^n \to R^{n+1}$ の場合

• $n \geq 4$ のときは Thomas (1936) により解決済

type 数 ≥ 4 の generic な仮定のもとで, 局所等長埋め込みが存在 $\Longleftrightarrow$ ガウス方程式が解をもつ

• $n = 3$ のとき, 内在的量だけで表せる必要十分条件はまだ知られていない

局所等長埋め込みが存在 $\Longrightarrow$ ガウス方程式は可解

”逆は不成立”

等長埋め込みとその延長

$f^*g_0 = g$ の共変微分，及び可積分条件

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f^1}{\partial x_i}, \cdots, \frac{\partial f^{n+k}}{\partial x_i}\right)$$

[1] $\langle f_i, f_j \rangle = g_{ij}, \qquad g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$

[2] $\langle f_i, \alpha_{jk} \rangle = 0$

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_k \Gamma^k_{ji} f_k$$ ：第2基本形式

[3] $\langle \alpha_{il}, \alpha_{jk} \rangle + \langle f_i, \beta_{jkl} \rangle = 0$

$$\boldsymbol{\beta}_{jkl} = \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_{jk}}{\partial x_l} - \sum_m \Gamma_{lj}^m \boldsymbol{\alpha}_{mk} - \sum_m \Gamma_{lk}^m \boldsymbol{\alpha}_{jm}$$

：$\boldsymbol{\beta} = \nabla \boldsymbol{\alpha}$

[4] $\langle \boldsymbol{\alpha}_{ik}, \boldsymbol{\alpha}_{jl} \rangle - \langle \boldsymbol{\alpha}_{il}, \boldsymbol{\alpha}_{jk} \rangle = R_{ijkl}$

：ガウス方程式

[5] $\langle \boldsymbol{\beta}_{ikm}, \boldsymbol{\alpha}_{jl} \rangle + \langle \boldsymbol{\alpha}_{ik}, \boldsymbol{\beta}_{jlm} \rangle$
$-\langle \boldsymbol{\beta}_{ilm}, \boldsymbol{\alpha}_{jk} \rangle - \langle \boldsymbol{\alpha}_{il}, \boldsymbol{\beta}_{jkm} \rangle = S_{ijklm}$

R は曲率, $S = \nabla R$, $\langle\ ,\ \rangle$ はR^{n+k} の内積

可積分条件

- $\boldsymbol{\alpha}_{ij} = \boldsymbol{\alpha}_{ji}$
- $\boldsymbol{\beta}_{jkl} = \boldsymbol{\beta}_{kjl}, \qquad \boldsymbol{\beta}_{jkl} - \boldsymbol{\beta}_{jlk} = \sum_m \boldsymbol{R}^m{}_{jkl}\, \boldsymbol{f}_m$

$$\langle \boldsymbol{\alpha}_{il}, \boldsymbol{\alpha}_{jk} \rangle + \langle \boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{\beta}_{jkl} \rangle = \mathbf{0}$$

$$\langle \boldsymbol{\alpha}_{ik}, \boldsymbol{\alpha}_{jl} \rangle + \langle \boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{\beta}_{jlk} \rangle = \mathbf{0}$$

$$[4]\ \langle \boldsymbol{\alpha}_{il}, \boldsymbol{\alpha}_{jk} \rangle - \langle \boldsymbol{\alpha}_{ik}, \boldsymbol{\alpha}_{jl} \rangle + \langle \boldsymbol{f}_i, \sum_m \boldsymbol{R}^m{}_{jkl}\, \boldsymbol{f}_m \rangle = \mathbf{0}$$

余次元１の場合

$$[4]\ R_{ijkl} = \alpha_{ik}\alpha_{jl} - \alpha_{il}\alpha_{jk}$$

$$[5]\ S_{ijklm} = \beta_{ikm}\alpha_{jl} + \alpha_{ik}\beta_{jlm} - \beta_{ilm}\alpha_{jk} - \alpha_{il}\beta_{jkm}$$

R_{ijkl}，S_{ijklm} ：内在的量

α_{ij}，β_{ijk} ：外在的量　(添字について対称)

埋め込み可能 $\Longrightarrow$ 方程式 [4], [5] が解を持つ

逆について

${}^{\exists}\,\overline{\alpha}_{ij}$ ：添字について対称

$\overline{\beta} = \nabla\,\overline{\alpha}$ とする.　このとき　$\overline{\beta}_{jkl} = \overline{\beta}_{kjl}$

$[\,\overline{4}\,]\ R_{ijkl} = \overline{\alpha}_{ik}\overline{\alpha}_{jl} - \overline{\alpha}_{il}\overline{\alpha}_{jk}$

$[C]\ \overline{\beta}_{jkl} = \overline{\beta}_{jlk}$ ：コダッチの方程式

(α に関する微分方程式)

$\Longrightarrow$ 等長埋め込み $f : M^n \to R^{n+1}$ が存在

ガウス方程式の可解性： $M^3 \subset R^4$

$$[\,\overline{4}\,]\ R_{ijkl} = \overline{\alpha}_{ik}\overline{\alpha}_{jl} - \overline{\alpha}_{il}\overline{\alpha}_{jk}$$

$$\Longrightarrow \begin{vmatrix} R_{1212} & R_{1213} & R_{1223} \\ R_{1312} & R_{1313} & R_{1323} \\ R_{2312} & R_{2313} & R_{2323} \end{vmatrix} \geq 0$$

逆に，

$$\begin{vmatrix} R_{1212} & R_{1213} & R_{1223} \\ R_{1312} & R_{1313} & R_{1323} \\ R_{2312} & R_{2313} & R_{2323} \end{vmatrix} > 0 \Longrightarrow [\,\overline{4}\,]$$ は解をもつ

解のかたち

$$\overline{\alpha}_{11}^{2} = \frac{\begin{vmatrix} R_{1212} & R_{1213} \\ R_{1312} & R_{1313} \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} R_{1212} & R_{1213} & R_{1223} \\ R_{1312} & R_{1313} & R_{1323} \\ R_{2312} & R_{2313} & R_{2323} \end{vmatrix}}, \quad \text{etc.}$$

新しい条件式： $M^3 \subset R^4$

$$[5]\ S_{ijklm} = \beta_{ikm}\alpha_{jl} + \alpha_{ik}\beta_{jlm} - \beta_{ilm}\alpha_{jk} - \alpha_{il}\beta_{jkm}$$

$\Longrightarrow$ **[New]：6 個の式 = 0（共変式）**

$$\begin{aligned} g_1 = {}& \alpha_{11}S_{12232} - \alpha_{12}S_{12132} - \alpha_{12}S_{12231} \\ & + \alpha_{13}S_{12122} + \alpha_{22}S_{12131} - \alpha_{23}S_{12121} = 0 \end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned} g_6 = {}& \alpha_{12}S_{23233} - \alpha_{13}S_{23232} - \alpha_{22}S_{13233} \\ & + \alpha_{23}S_{13232} + \alpha_{23}S_{12233} - \alpha_{33}S_{12232} = 0 \end{aligned}$$

$[\,\overline{4}\,]$, [New] $\Longrightarrow$ コダッチ方程式

$[\,\overline{4}\,]$ の条件の下,

$$\begin{vmatrix} R_{1212} & R_{1213} & R_{1223} \\ R_{1312} & R_{1313} & R_{1323} \\ R_{2312} & R_{2313} & R_{2323} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{\alpha}_{11} & \overline{\alpha}_{12} & \overline{\alpha}_{13} \\ \overline{\alpha}_{12} & \overline{\alpha}_{22} & \overline{\alpha}_{23} \\ \overline{\alpha}_{13} & \overline{\alpha}_{23} & \overline{\alpha}_{33} \end{vmatrix}^2$$

が成り立つ

以下, この式 $\neq 0$ とする

$[\,\overline{4}\,]$ を共変微分

$$[\,\overline{\mathbf{5}}\,]\; \boldsymbol{S}_{ijklm} = \overline{\boldsymbol{\beta}}_{ikm}\overline{\boldsymbol{\alpha}}_{jl} + \overline{\boldsymbol{\alpha}}_{ik}\overline{\boldsymbol{\beta}}_{jlm} - \overline{\boldsymbol{\beta}}_{ilm}\overline{\boldsymbol{\alpha}}_{jk} - \overline{\boldsymbol{\alpha}}_{il}\overline{\boldsymbol{\beta}}_{jkm}$$

$$\overline{\boldsymbol{\beta}}_{ijk} = \overline{\boldsymbol{\beta}}_{jik}$$

$$\Longrightarrow$$

$\overline{\boldsymbol{\beta}}_{ijk} =$ **($\overline{\alpha}$の２次式)** $\times$**(Sの１次式)/det ($\overline{\alpha}_{ij}$)**

$\overline{\boldsymbol{\beta}}_{ijk} - \overline{\boldsymbol{\beta}}_{ikj} =$ **($\overline{\alpha}$の１次式)** $\times$**[New]/det ($\overline{\alpha}_{ij}$)**

$$= \mathbf{0}$$

話の流れのまとめ

$$[\,\overline{\mathbf{4}}\,] \Longrightarrow [\,\overline{\mathbf{5}}\,] \Longrightarrow \overline{\beta}\textbf{の計算} \Longrightarrow [C]$$

$$\Uparrow$$

[New]

$[\,\overline{4}\,]$, [New] を内在的条件に書き換える

$[\,\overline{4}\,]$ $R_{ijkl} = \overline{\alpha}_{ik}\overline{\alpha}_{jl} - \overline{\alpha}_{il}\overline{\alpha}_{jk}$

$$\Longleftarrow \begin{vmatrix} R_{1212} & R_{1213} & R_{1223} \\ R_{1312} & R_{1313} & R_{1323} \\ R_{2312} & R_{2313} & R_{2323} \end{vmatrix} > 0$$

このとき, $\overline{\alpha}_{ij}$ は曲率で表せる

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}}_{11} = \frac{\begin{vmatrix} R_{1212} & R_{1213} \\ R_{1312} & R_{1313} \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} R_{1212} & R_{1213} & R_{1223} \\ R_{1312} & R_{1313} & R_{1323} \\ R_{2312} & R_{2313} & R_{2323} \end{vmatrix}}},$$

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}}_{12} = \frac{\begin{vmatrix} R_{1212} & R_{1213} \\ R_{2312} & R_{2313} \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} R_{ijkl} \end{vmatrix}}}, \quad \text{etc.}$$

これを [New] に代入

$$\boldsymbol{g_1 = \overline{\alpha}_{11} S_{12232} - \overline{\alpha}_{12} S_{12132} - \overline{\alpha}_{12} S_{12231}}$$
$$\boldsymbol{+\overline{\alpha}_{13} S_{12122} + \overline{\alpha}_{22} S_{12131} - \overline{\alpha}_{23} S_{12121} = 0}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\boldsymbol{g_6 = \overline{\alpha}_{12} S_{23233} - \overline{\alpha}_{13} S_{23232} - \overline{\alpha}_{22} S_{13233}}$$
$$\boldsymbol{+\overline{\alpha}_{23} S_{13232} + \overline{\alpha}_{23} S_{12233} - \overline{\alpha}_{33} S_{12232} = 0}$$

Rivertz (1999) の条件式

R と S だけの, 内在的な条件式に書き換えられる.

$$R_{1212}R_{1313}S_{12232} - R_{1212}R_{1323}S_{12132} - R_{1212}R_{1323}S_{12231}$$
$$+R_{1212}R_{2323}S_{12131} - {R_{1213}}^2S_{12232} + R_{1213}R_{1223}S_{12132}$$
$$+R_{1213}R_{1223}S_{12231} + R_{1213}R_{1323}S_{12122} - R_{1213}R_{2323}S_{12121}$$
$$-{R_{1223}}^2S_{12131} - R_{1223}R_{1313}S_{12122} + R_{1223}R_{1323}S_{12121} = 0$$

••••••••••

全部で6個の式

結論

- $\begin{vmatrix} \boldsymbol{R_{1212}} & \boldsymbol{R_{1213}} & \boldsymbol{R_{1223}} \\ \boldsymbol{R_{1312}} & \boldsymbol{R_{1313}} & \boldsymbol{R_{1323}} \\ \boldsymbol{R_{2312}} & \boldsymbol{R_{2313}} & \boldsymbol{R_{2323}} \end{vmatrix} > \mathbf{0},$ **かつ**
- **Rivertz の等式６個が成立**

$\Longrightarrow \boldsymbol{M^3} \subset \boldsymbol{R^4}$

問題はここから始まります!

- この，テンソル式をどうとらえたらよいのか??
- 普通の人には認識できないほどの長い式が現れる
- 代入して０になることを，(計算機を使わずに) どのようにして証明するか?

[New] がポイント

$$g_1 = \alpha_{11}S_{12232} - \alpha_{12}S_{12132} - \alpha_{12}S_{12231}$$
$$+\alpha_{13}S_{12122} + \alpha_{22}S_{12131} - \alpha_{23}S_{12121}$$

は一体どのような意味をもった式なのか?

$$[5]\ S_{ijklm} = \beta_{ikm}\alpha_{jl} + \alpha_{ik}\beta_{jlm} - \beta_{ilm}\alpha_{jk} - \alpha_{il}\beta_{jkm}$$

のとき, 何故０になるのか?

かなり大胆な式変形

$$g_1 = \alpha_{11}S_{12232} - \alpha_{12}S_{12132} - \alpha_{12}S_{12231}$$
$$+\alpha_{13}S_{12122} + \alpha_{22}S_{12131} - \alpha_{23}S_{12121}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdot$$

$$g_6 = \alpha_{12}S_{23233} - \alpha_{13}S_{23232} - \alpha_{22}S_{13233}$$
$$+\alpha_{13}S_{12122} + \alpha_{22}S_{12131} - \alpha_{23}S_{12121}$$

- これは $\{331\}$ 型の共変式
- $x_1^2, x_1x_2, \cdots, x_3^2$ と混ぜて不変式 $\{333\}$ を作る

6 つ合わせて一つの式

$$x_3^2 g_1 - x_2 x_3 g_2 + x_1 x_3 g_3 + x_2^2 g_4 - x_1 x_2 g_5 + x_1^2 g_6$$

(x_i は補助変数)

さらに，$S_{12132} = S_{12}S_{13}S_2$, $\alpha_{12} = \alpha_1\alpha_2$ と

記号的に分解 (ただし, 復元可能)

$$\text{上式} = (x_1 S_{23} - x_2 S_{13} + x_3 S_{12})(\alpha_1 S_{23} - \alpha_2 S_{13} + \alpha_3 S_{12})$$

$$\times \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix} \qquad (\text{各項} = x_i S_{jk} \alpha_l S_{pq} x_r \alpha_s S_t)$$

同様にして

$$[\mathbf{5}]\ \boldsymbol{S_{ijklm} = \beta_{ikm}\alpha_{jl} + \alpha_{ik}\beta_{jlm} - \beta_{ilm}\alpha_{jk} - \alpha_{il}\beta_{jkm}}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{S_{ij}S_{kl}S_m = \beta_i\beta_k\beta_m\alpha_j\alpha_l + \alpha_i\alpha_k\beta_j\beta_l\beta_m}$$
$$\boldsymbol{-\beta_i\beta_l\beta_m\alpha_j\alpha_k - \alpha_i\alpha_l\beta_j\beta_k\beta_m}$$

と分解して代入する.

ただし，このままだと

$$\alpha_{11}S_{12232} = (\alpha_1\alpha_1)(\beta_1\beta_2\beta_2\alpha_2\alpha_3 + \cdots)$$

となって，一度バラすと復元できなくなる

$$\Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} S_{ij}S_{kl}S_m = &\beta_i\beta_k\beta_m\overline{\alpha}_j\overline{\alpha}_l + \overline{\alpha}_i\overline{\alpha}_k\beta_j\beta_l\beta_m \\ &-\beta_i\beta_l\beta_m\overline{\alpha}_j\overline{\alpha}_k - \overline{\alpha}_i\overline{\alpha}_l\beta_j\beta_k\beta_m \end{aligned}$$

として代入する

$$S_{ij}S_{kl}S_m = \beta_m \begin{vmatrix} \overline{\alpha}_i & \overline{\alpha}_j \\ \beta_i & \beta_j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overline{\alpha}_k & \overline{\alpha}_l \\ \beta_k & \beta_l \end{vmatrix}$$

となり，

$$(x_1 S_{23} - x_2 S_{13} + x_3 S_{12})(\alpha_1 S_{23} - \alpha_2 S_{13} + \alpha_3 S_{12}) \\ \times \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix}$$

を分解したときの　$S_{ij}S_{kl}S_m$　に上式を代入する

すると，この式は

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{x_3} \\ \overline{\boldsymbol{\alpha}}_1 & \overline{\boldsymbol{\alpha}}_2 & \overline{\boldsymbol{\alpha}}_3 \\ \boldsymbol{\beta_1} & \boldsymbol{\beta_2} & \boldsymbol{\beta_3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{\alpha_2} & \boldsymbol{\alpha_3} \\ \overline{\boldsymbol{\alpha}}_1 & \overline{\boldsymbol{\alpha}}_2 & \overline{\boldsymbol{\alpha}}_3 \\ \boldsymbol{\beta_1} & \boldsymbol{\beta_2} & \boldsymbol{\beta_3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{x_3} \\ \boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{\alpha_2} & \boldsymbol{\alpha_3} \\ \boldsymbol{\beta_1} & \boldsymbol{\beta_2} & \boldsymbol{\beta_3} \end{vmatrix}$$

となる.

これが [5] $S_{ijklm} = \sum \alpha\beta$ を $g_1 \sim g_6$ に代入した式

この式は何故 0 になるか?

$$P_{ij} = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ \beta_i & \beta_j \end{vmatrix}$$ とおくと，与式は

$$(\overline{\alpha}_1 P_{23} - \overline{\alpha}_2 P_{13} + \overline{\alpha}_3 P_{12})(\alpha_1 P_{23} - \alpha_2 P_{13} + \alpha_3 P_{12})$$

$$\times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \overline{\alpha}_1 & \overline{\alpha}_2 & \overline{\alpha}_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

$$= \sum (\overline{\alpha}_i \alpha_j + \alpha_i \overline{\alpha}_j) P_{**} P_{**} \beta_* (\alpha_p \overline{\alpha}_q - \alpha_q \overline{\alpha}_p)$$

$$= (\alpha_{iq}\alpha_{jp} - \alpha_{ip}\alpha_{jq} + \alpha_{ip}\alpha_{jq} - \alpha_{iq}\alpha_{jp}) P_{**} P_{**} \beta_*$$

$$= 0$$

アイデア

- 補助変数を導入

  不変式という一つの式として処理する
- 記号的方法を用いる $=$ 式を記号上で分解

$\Longrightarrow$

通常の行列式の性質に帰着する

この方法はどこまで通用するか?