Cayley-Hamilton の定理と Amitsur-Levitzki の恒等式 – 外積代数への拡張と展望 –

阿賀岡 芳夫　(広島大学)

2014年3月7日

– Typeset by FoilTEX –

Cayley-Hamilton の定理

A : (n, n) -行列

$$A^n + f_1(A)A^{n-1} + \cdots + f_n(A)A^0 = 0 : V \to V$$

$$V = C^n, \quad A^0 = I_n,$$

$$\det\,(\lambda I_n - A) = \sum_{i=0}^{n} f_i(A)\lambda^{n-i}$$

$$f_1(A) = -\mathrm{Tr}\,A,\ \cdots\ ,\ f_n(A) = (-1)^n \det\,A$$

Amitsur-Levitzki の恒等式(1950)

$A_1, \cdots, A_{2n} : (n, n)$ 行列

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} (-1)^{\sigma} A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(2n)} = 0 : V \to V$$

$$n = 1 : A_1A_2 - A_2A_1 = 0$$

$$n = 2 : A_1A_2A_3A_4 - A_2A_1A_3A_4 \pm \cdots = 0$$

行列の積は非可換，しかし非常に弱い意味で可換

拡張と展望

- これらの恒等式を外積代数・対称代数に拡張することが可能

- 更に，それをある代数に拡張したい

$\Longrightarrow$ 曲率・ガウス方程式への応用

記号

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{C}^n, \quad \boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_p : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{A}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{A}_p : \wedge^p \boldsymbol{V} \longrightarrow \wedge^p \boldsymbol{V}$$

$$(\boldsymbol{A}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{A}_p)(\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} (-1)^\sigma \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{x}_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{A}_p \boldsymbol{x}_{\sigma(p)}$$

$$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_p \in \boldsymbol{V}$$

性質

任意の $\boldsymbol{\sigma} \in \mathfrak{S}_p$ に対して

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(1)} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p})} = \boldsymbol{A}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{p}}$$

Cayley-Hamilton の定理 (外積版)

$$1 \leq p \leq n, \quad r = n + 1 - p, \quad A : V \to V$$

$$\sum_{a_1+\cdots+a_p=r} A^{a_1} \wedge \cdots \wedge A^{a_p}$$

$$+f_1(A) \sum_{a_1+\cdots+a_p=r-1} A^{a_1} \wedge \cdots \wedge A^{a_p}$$

$$+ \cdots + f_{r-1}(A) \sum_{a_1+\cdots+a_p=1} A^{a_1} \wedge \cdots \wedge A^{a_p}$$

$$+f_r(A) \cdot I \wedge \cdots \wedge I = 0 : \wedge^p V \to \wedge^p V$$

$$(a_1, \cdots, a_p \geq 0)$$

$p = 1$ のとき $r = n$

通常の Cayley-Hamilton の定理

$\boldsymbol{p = 2}$ のとき，$\boldsymbol{r = n - 1}$

$$\sum_{a+b=n-1} A^a \wedge A^b + f_1(A) \sum_{a+b=n-2} A^a \wedge A^b$$

$$+ \cdots + f_{n-2}(A) \sum_{a+b=1} A^a \wedge A^b$$

$$+ f_{n-1}(A) \cdot I \wedge I = 0 : \wedge^2 V \longrightarrow \wedge^2 V$$

$$(a, b \geq 0)$$

$p = n$ のとき，$r = 1$

$$\sum_{a_1+\cdots+a_n=1} \boldsymbol{A}^{a_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{A}^{a_n}$$

$$+ f_1(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{I} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{I} = \boldsymbol{0} : \wedge^n \boldsymbol{V} \longrightarrow \wedge^n \boldsymbol{V}$$

つまり

$$n\,\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{I} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{I}$$

$$- \mathsf{Tr}\,\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{I} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{I} = \boldsymbol{0} : \wedge^n \boldsymbol{V} \longrightarrow \wedge^n \boldsymbol{V}$$

例えば, $n = 2$ ならば

$$2\,A \wedge I - \mathrm{Tr}\,A \cdot I \wedge I = 0$$

$$2\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right) - (a+d)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} az+bw \\ cz+dw \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$-(a+d)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$

$$= (ax+by)w - (cx+dy)z - (az+bw)y + (cz+dw)x$$

$$-(a+d)(xw-yz) = 0$$

証明に使う道具

- Schur 関数 $S_\lambda(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$

  (λ は非負整数の分割)

- Littlewood-Richardson 法則

$$S_\lambda S_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu} S_\nu$$

- 固有値が $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ となる対角行列 A に対し, 恒等式を示す

Amitsur-Levitzki の恒等式
(対称テンソル版)

$$A_1, \cdots, A_p : V \to V$$

$$A_1 \circ \cdots \circ A_p : S^p V \to S^p V$$

$$(A_1 \circ \cdots \circ A_p)(x_1 \circ \cdots \circ x_p)$$
$$= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} A_1 x_{\sigma(1)} \circ \cdots \circ A_p x_{\sigma(p)}$$

ここに $x_1 \circ \cdots \circ x_p$ は $x_1, \cdots, x_p \in V$ の対称積

性質

任意の $\boldsymbol{\sigma} \in \mathfrak{S}_p$ に対して

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(1)} \circ \cdots \circ \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(p)} = \boldsymbol{A}_1 \circ \cdots \circ \boldsymbol{A}_p$$

定理

$$\boldsymbol{A_1, \cdots, A_{2n} : V \to V}$$

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} (-1)^{\sigma} (A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)}) \circ (A_{\sigma(3)} A_{\sigma(4)}) \circ \cdots$$

$$\circ (A_{\sigma(2n-1)} A_{\sigma(2n)}) = 0 : S^n V \to S^n V$$

縮約 (contraction)

$\boldsymbol{A}_1 \circ \cdots \circ \boldsymbol{A}_p : \boldsymbol{S}^p\boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{S}^p\boldsymbol{V}$ を１回縮約すると

$$\sum_{i=1}^{p} \mathrm{Tr}\ \boldsymbol{A}_i \cdot \boldsymbol{A}_1 \circ \cdots \circ \hat{\boldsymbol{A}}_i \circ \cdots \circ \boldsymbol{A}_p$$

$$+\sum_{i \neq j} (\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{A}_j) \circ \boldsymbol{A}_1 \circ \cdots \circ \hat{\boldsymbol{A}}_i \circ \cdots \circ \hat{\boldsymbol{A}}_j \circ \cdots \circ \boldsymbol{A}_p$$

$$: \boldsymbol{S}^{p-1}\boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{S}^{p-1}\boldsymbol{V}$$

$\Longrightarrow$ 先程の式を $n-1$ 回縮約すると A-L の恒等式

証明の方針

$$A_1 \square \cdots \square A_p : S^p V \longrightarrow \wedge^p V$$

$$(A_1 \square \cdots \square A_p)(x_1 \circ \cdots \circ x_p)$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} A_1 x_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge A_p x_{\sigma(p)}$$

$$A_1 \triangle \cdots \triangle A_p : \wedge^p V \longrightarrow S^p V$$

$$(A_1 \triangle \cdots \triangle A_p)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p)$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} (-1)^\sigma A_1 x_{\sigma(1)} \circ \cdots \circ A_p x_{\sigma(p)}$$

合成写像の和

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} (-1)^{\sigma} (A_{\sigma(1)} \triangle \cdots \triangle A_{\sigma(n)})$$

$$(A_{\sigma(n+1)} \wedge I \wedge \cdots \wedge I)(A_{\sigma(n+2)} \square \cdots \square A_{\sigma(2n)} \square I)$$

$$: S^n V \to S^n V$$

を２種類の方法で計算

- 定義に従って，合成写像を計算

- Cayley-Hamliton の定理

$$A_{\sigma(n+1)} \wedge I \wedge \cdots \wedge I = \frac{1}{n} \mathrm{Tr}\, A_{\sigma(n+1)} \cdot I \wedge \cdots \wedge I$$

を代入してから，合成写像を計算

$\Longrightarrow$ 両者を $=$ で結んで，式変形すると

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} (-1)^{\sigma} (A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)}) \circ \cdots \circ (A_{\sigma(2n-1)} A_{\sigma(2n)})$$

$$= -(n-1) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} (-1)^{\sigma} (A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} A_{\sigma(3)})$$

$$\circ (A_{\sigma(4)} A_{\sigma(5)}) \circ \cdots \circ (A_{\sigma(2n-2)} A_{\sigma(2n-1)}) \circ A_{\sigma(2n)}$$

$$- \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} (-1)^{\sigma} \operatorname{Tr} A_{\sigma(1)} \cdot (A_{\sigma(2)} A_{\sigma(3)})$$

$$\circ \cdots \circ (A_{\sigma(2n-2)} A_{\sigma(2n-1)}) \circ A_{\sigma(2n)}$$

次に，合成写像の和

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} (-1)^{\sigma} (A_{\sigma(1)} \triangle \cdots \triangle A_{\sigma(n-1)} \triangle I)$$

$$(A_{\sigma(n)} \wedge I \wedge \cdots \wedge I)(A_{\sigma(n+1)} \square \cdots \square A_{\sigma(2n)})$$

$$: S^n V \to S^n V$$

を同様にして，２種類の方法で計算

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2n}}(-1)^{\sigma}(A_{\sigma(1)}A_{\sigma(2)})\circ\cdots\circ(A_{\sigma(2n-1)}A_{\sigma(2n)})$$

$$=+(n-1)\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2n}}(-1)^{\sigma}(A_{\sigma(1)}A_{\sigma(2)}A_{\sigma(3)})$$

$$\circ(A_{\sigma(4)}A_{\sigma(5)})\circ\cdots\circ(A_{\sigma(2n-2)}A_{\sigma(2n-1)})\circ A_{\sigma(2n)}$$

$$+\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2n}}(-1)^{\sigma}\,\mathrm{Tr}\,A_{\sigma(1)}\cdot(A_{\sigma(2)}A_{\sigma(3)})$$

$$\circ\cdots\circ(A_{\sigma(2n-2)}A_{\sigma(2n-1)})\circ A_{\sigma(2n)}$$

従って

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} (-1)^{\sigma} (A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)}) \circ \cdots \circ (A_{\sigma(2n-1)} A_{\sigma(2n)}) = 0$$

Cayley-Hamilton の定理 (外積版)を使って証明

J.P.Razmyslov, C.Procesi

定理 (1974, 1976)

行列の恒等式は，すべて Cayley-Hamilton の定理の結果として得られる

「結果として得られる」

$\Longleftrightarrow$ 和・積・代入の操作により得られる

$n = 2$ のときの A-L 恒等式

$$\boldsymbol{A}^2 - \text{Tr } \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{2}\{(\text{Tr } \boldsymbol{A})^2 - \text{Tr } \boldsymbol{A}^2\} \cdot \boldsymbol{I_2} = \boldsymbol{0}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BA} - \text{Tr } \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} - \text{Tr } \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$$

$$+(\text{Tr } \boldsymbol{A} \cdot \text{Tr } \boldsymbol{B} - \text{Tr } \boldsymbol{AB}) \cdot \boldsymbol{I_2} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{A} \longrightarrow [\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2],\ \boldsymbol{B} \longrightarrow [\boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4],$$

添字 $1 \sim 4$ を交代化すると得られる

伊藤 稔 (2013?), 鹿児島大

Razmyslov, Procesi の結果のテンソル版を証明

広島大学における集中講義 (2013年) で紹介

例えば

$n = 2$ のとき

$$A_1 \square A_2 + \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}\ A_1 \cdot A_2 - \mathrm{Tr}\ A_2 \cdot A_1) \square I_2$$

$$- \frac{1}{2}[A_1, A_2] \square I_2 = 0 : S^2 C^2 \to \wedge^2 C^2,$$

$$A_1 \triangle A_2 + \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}\ A_1 \cdot A_2 - \mathrm{Tr}\ A_2 \cdot A_1) \triangle I_2$$

$$+ \frac{1}{2}[A_1, A_2] \triangle I_2 = 0 : \wedge^2 C^2 \to S^2 C^2$$

は $A \wedge I_2 = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ A \cdot I_2 \wedge I_2 = 0$ から導ける

類似の恒等式 (於 Gauss 方程式)

$R : n$ 次元リーマン多様体 (M, g) の曲率

$$R(X, Y) : T_pM \to T_pM, \quad X, Y \in T_pM$$

以降, $V = T_pM$ とおく

$^\exists f : (M^n, g) \to (R^{n+k}, g_0)$

リーマン多様体の等長埋め込み

$k =$ 余次元

ガウス方程式

$\Longrightarrow$

${}^{\exists}\alpha \in S^2V^* \otimes R^k$：第２基本形式

R^k：法空間，　$\langle\ ,\ \rangle$：R^k の内積

$$-g(R(X,Y)Z,W)$$
$$= \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W)\rangle - \langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z)\rangle$$

(曲率が分解される)

ガウス方程式が余次元 k で解をもてば

$$(*) \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2k+2}} (-1)^{\sigma} R(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}) \circ \cdots \circ R(X_{\sigma(2k+1)}, X_{\sigma(2k+2)}) = 0$$

$$: S^{k+1}V \longrightarrow S^{k+1}V$$

- **A-L 恒等式に似ている**
- $k = 0$ **のとき，** $(*) \Longleftrightarrow R = 0$
- $n \geq 2k + 2$ **のときに非自明となる条件式**

従って

$^\exists f : (M^n, g) \to (R^{n+k}, g_0)$

リーマン多様体の等長埋め込み

$\Longrightarrow$ $(*)$ が成立

これは$k \leq \left[\frac{n-2}{2}\right]$ の範囲においてのみ有効な等長埋め込みの obstruction

本当は, もっと大きな k についての条件式がほしい. $(k = \frac{1}{2}n(n-1) - 1$ のときなど)

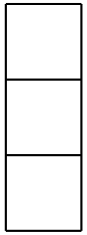
Young 図形

$$\ydiagram{1} = \boldsymbol{V^*}, \quad \ydiagram{1,1} = \wedge^2 \boldsymbol{V^*}, \quad \ydiagram{1,1,1} = \wedge^3 \boldsymbol{V^*}, \quad \cdots$$

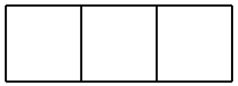
$$\ydiagram{2} = \boldsymbol{S^2 V^*}, \quad \ydiagram{3} = \boldsymbol{S^3 V^*}, \quad \cdots$$

$$\ydiagram{2,2} = \{\boldsymbol{R} \in \wedge^2 \boldsymbol{V^*} \otimes \wedge^2 \boldsymbol{V^*} \mid \mathfrak{S}_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}}\, \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{0}\}$$

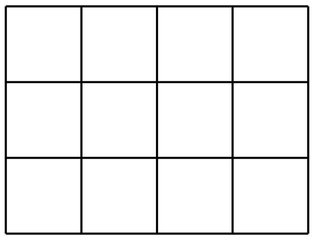
今後の課題



: Cayley-Hamilton のグラスマン版



: Amitsur-Levitzki の対称積版



: 恒等式 ???? $\Longrightarrow$ 幾何学への応用

文献

[1] Y.Agaoka, On Cayley-Hamilton's theorem and Amitsur-Levitzki's identity, Proc. Japan Acad. Ser.A 63 (1987) 82–85.

[2] A.M.Amitsur, J.Levitzki, Minimal identities for algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950) 449-463.

[3] C.Procesi, The invariant theory of $n \times n$ matrices, Adv. in Math. 19 (1976) 306–381.

[4] J.P.Razmyslov, Trace identities of full matrix algebras over a field of characteristic zero, Math. USSR Izv. 8 (1974) 727-760.