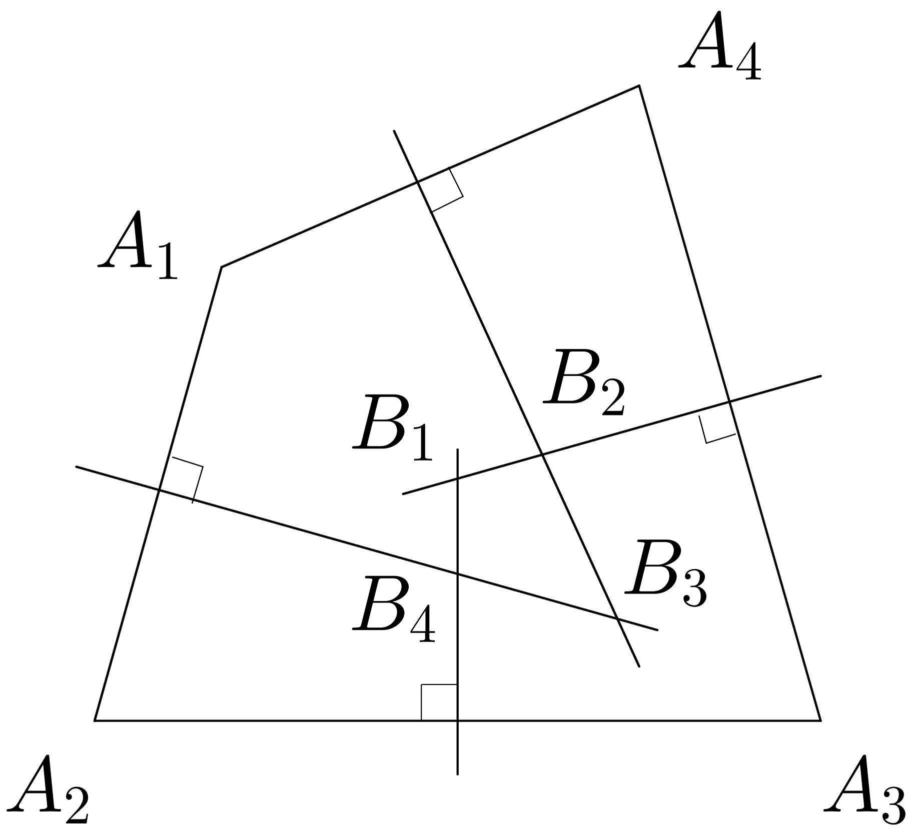
ラングルの問題と四角形の不変量

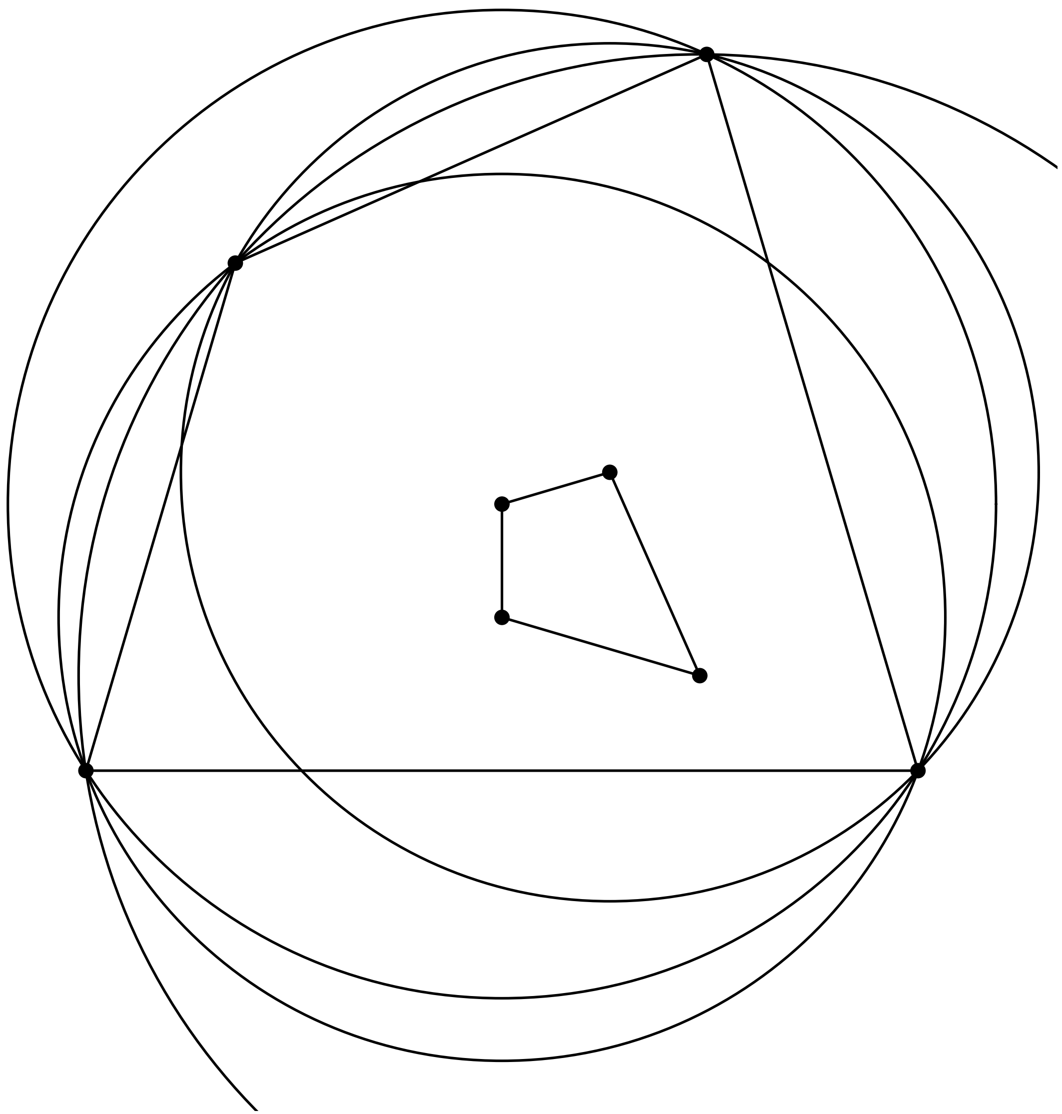
阿賀岡 芳夫　(広島大学)

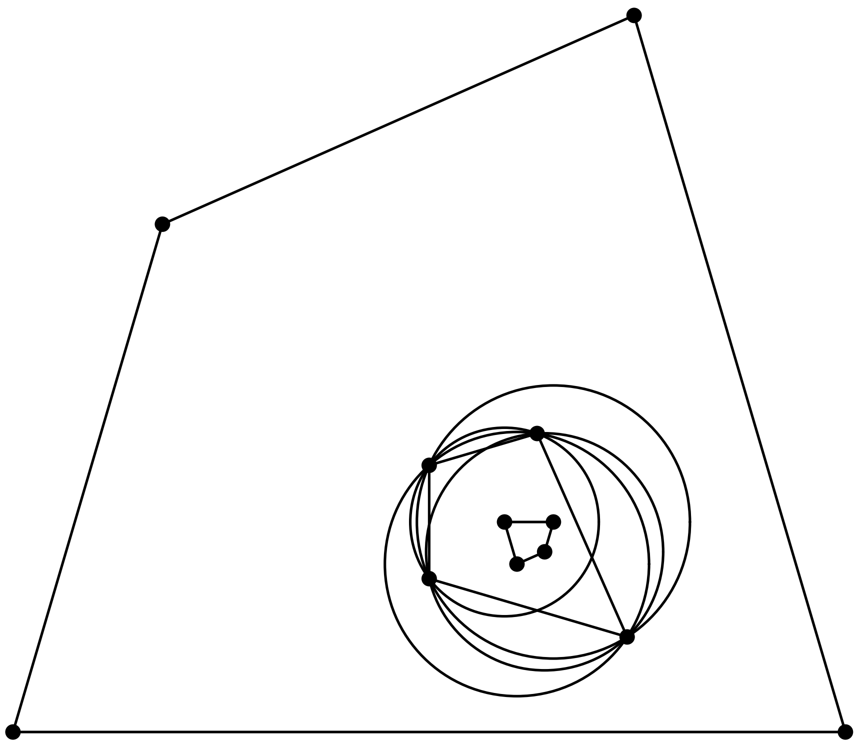
2013年3月8日

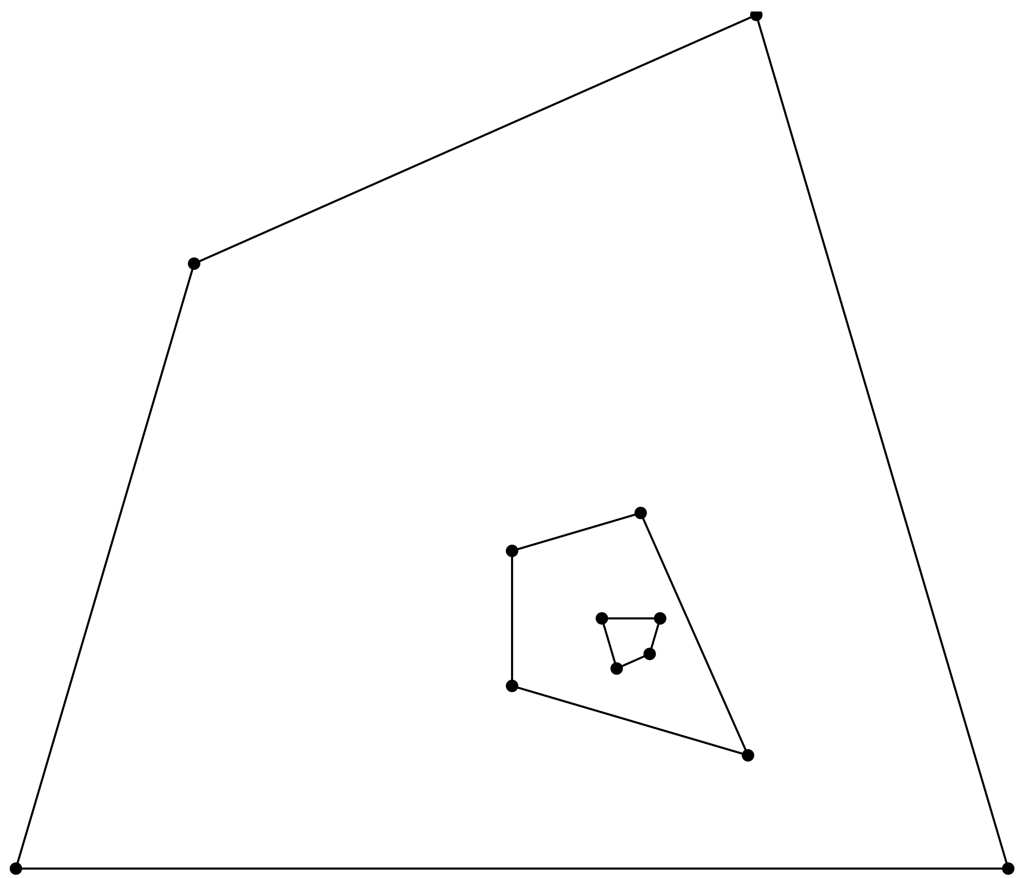
– Typeset by FoilTEX –

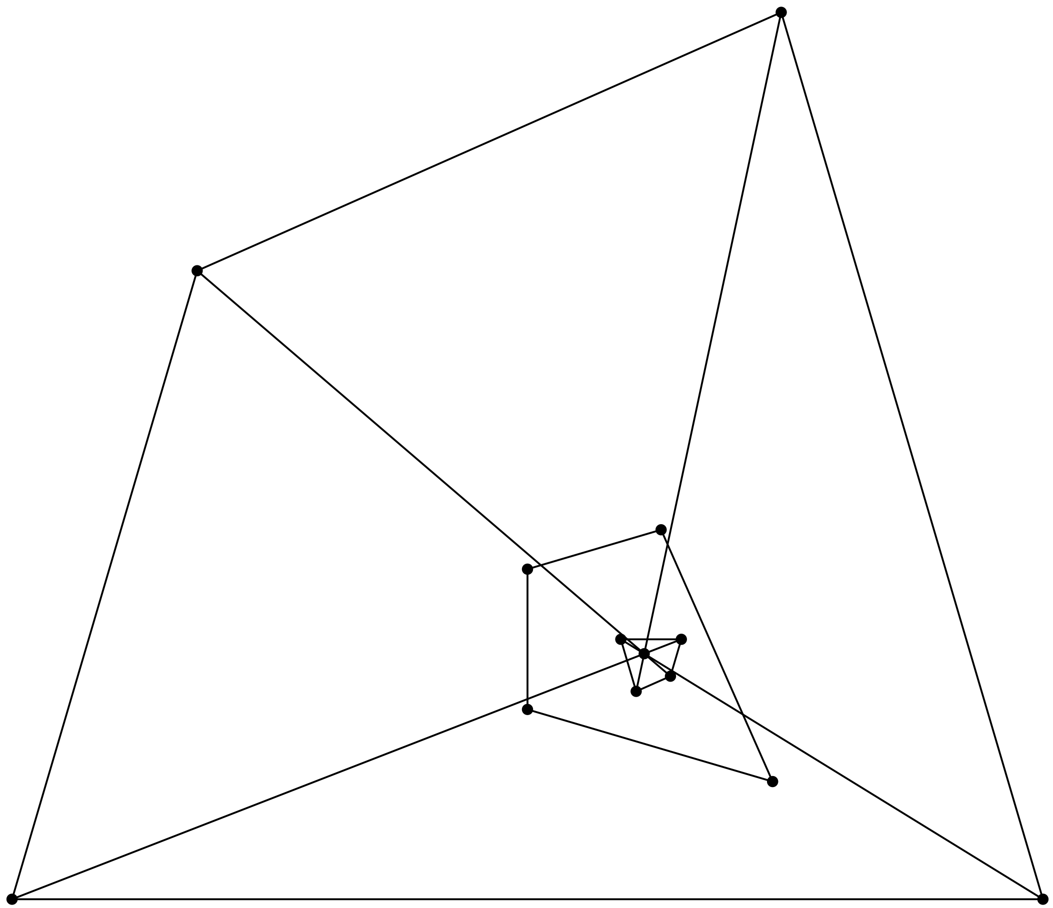
ラングルの問題とは











不思議なことに· · ·

(generic な) ４角形が与えられる

$\Longrightarrow$

- ４角形の<u>心</u>、相似比（４角形の<u>不変量</u>）が定まる
- 対となる４角形(の相似類)が存在する

(例外的なケース：４角形が円に内接する場合)

ラングル(Langr)の問題の歴史

- Josef Langr ： Amer. Math. Monthly 60 (1953) Problem E1085　問題提出
- オジルビ(C.S.Ogilvy)「明日への数学」(1962)に未解決問題として紹介
- B.Grünbaum ： Quadrangles, pentagons, and computers, Geombinatorics (1993) ４０年間未解決の問題として紹介

- **G.C.Shephard, Geom. Dedicata 56 (1995)**
  三角関数を使って証明, 比は非常に複雑な式
- **D.Bennett, J.King, 初等的に証明**
  (in "Geometry Turned On!", 1997)

$$\lambda = \frac{1}{4}\left(-\left(\frac{1}{\sin^2\theta_1}+\frac{1}{\sin^2\theta_2}\right)+\frac{\sin\theta_2\sin(\theta_1-\theta_4)}{\sin(\theta_3+\theta_4)\sin^2\theta_1\sin\theta_4}\right.$$
$$\left.+\frac{\sin\theta_1\sin(\theta_2-\theta_3)}{\sin(\theta_3+\theta_4)\sin^2\theta_2\sin\theta_3}\right)$$

しかし，実は …

- M.Thomas, Amer. Math. Monthly 80 (1973) で解決済み!
- M.Geraghty, Amer. Math. Monthly 81 (1974) が比を求めている

$$\frac{1}{4}\,|\cot\alpha + \cot\gamma| \cdot |\cot\beta + \cot\delta|$$

実は，２０年後には解決していた!

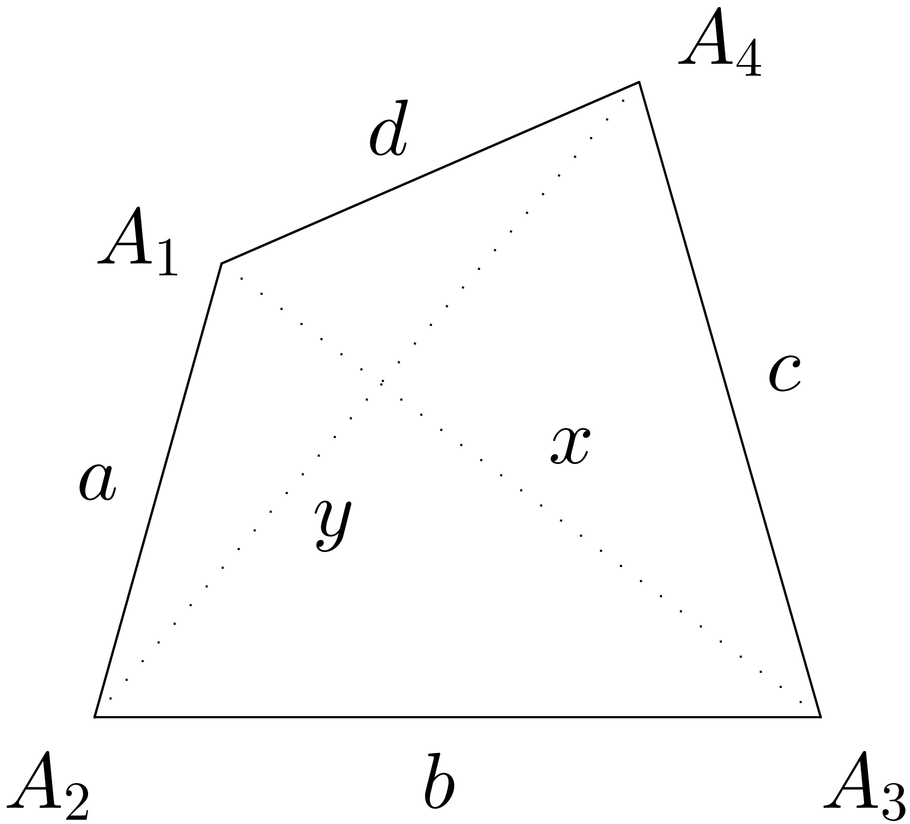
今日の目標

４角形の不変量(不変式)の立場から，この問題を見つめ直す

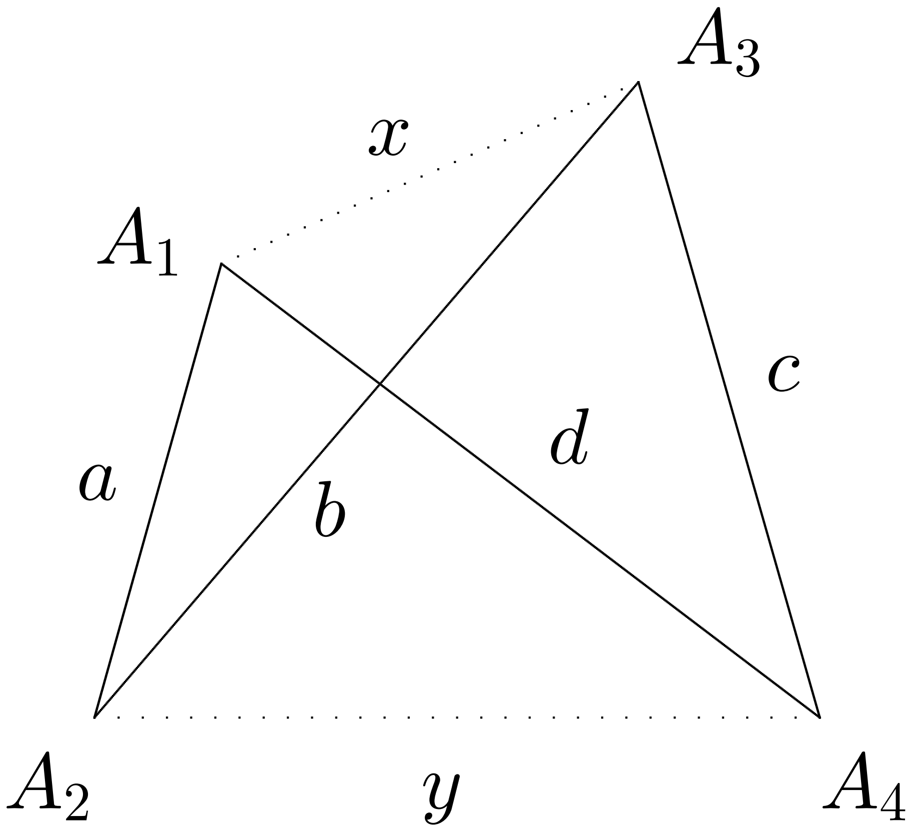
結論

$A_1A_2A_3A_4$ と $B_1B_2B_3B_4$ は相似ではないが，不変式的立場から見るとほとんど相似(「擬似相似」とでも表現すべきもの)である

記号



自己交叉も許す



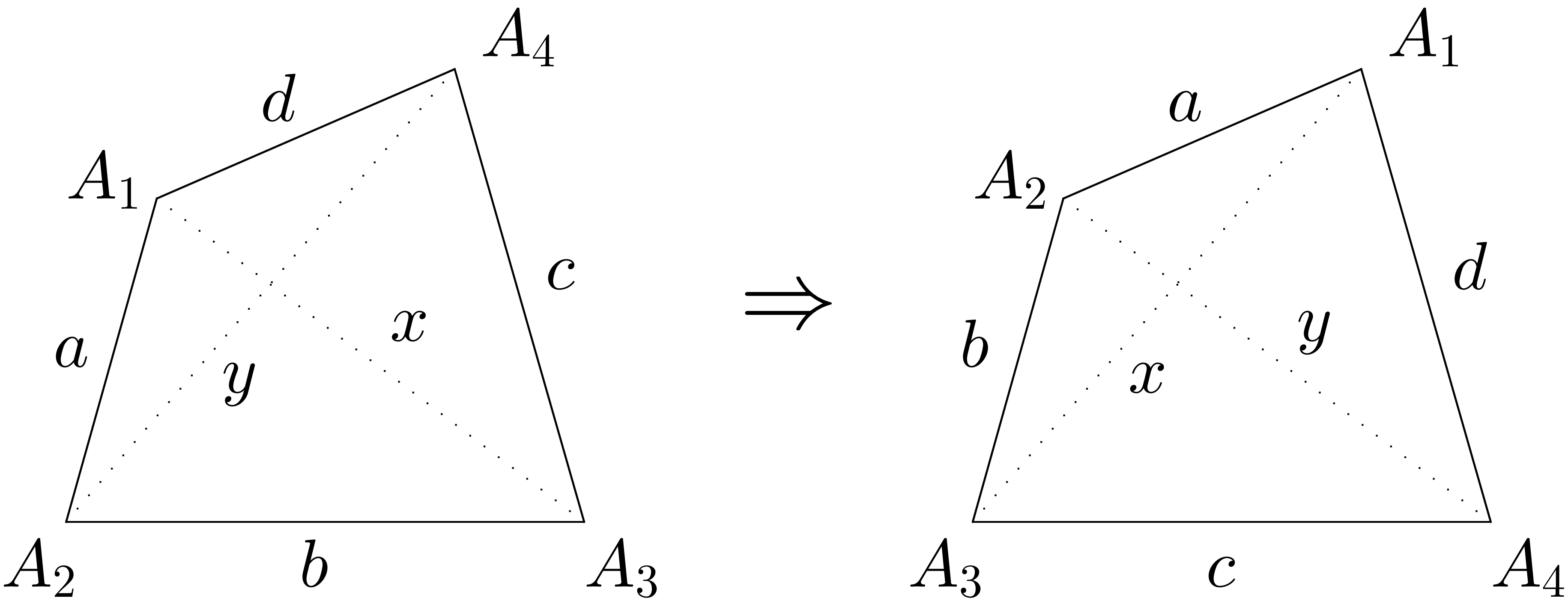
辺・対角線の長さによる不変量

$a \sim d,\ x,\ y$ の多項式で表される４角形の不変量をすべて求める

$a+b+c+d,\ x+y$ 等

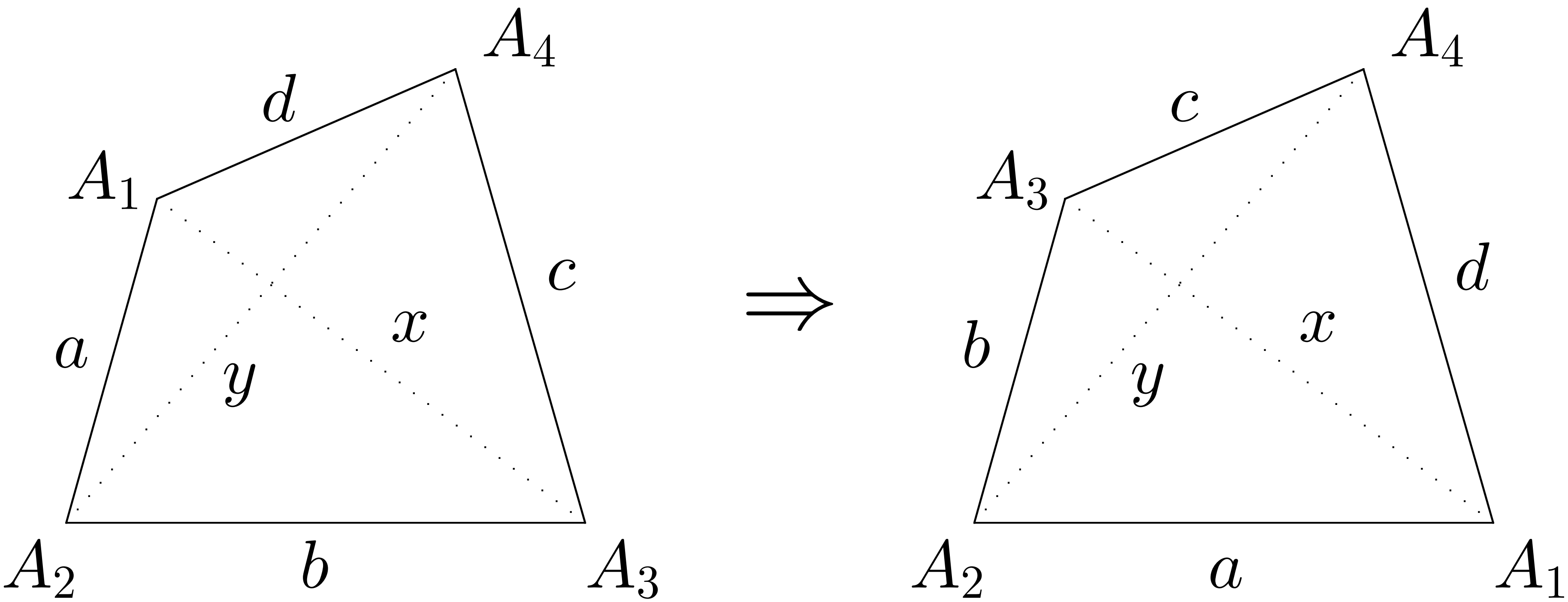
- 不変量はどれだけあるか?
- 不変量だけで４角形の合同類は定まるか?
- 不変量に従属関係はあるか?
- ラングルの問題との関係は?

番号をずらす



$$\boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{b} \mapsto \boldsymbol{c} \mapsto \boldsymbol{d} \mapsto \boldsymbol{a}, \qquad \boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{y}$$

1 と 3 を入れ替える



$\boldsymbol{a \leftrightarrow b}$**,** $\boldsymbol{c \leftrightarrow d}$**,** $\boldsymbol{x, y}$ **: fixed**

定理

D_4 の作用で不変な a, b, c, d, x, y の多項式は次の 8 個の式の多項式として表せる:

$$\begin{aligned}
f_1 &= a+b+c+d, \quad & g_1 &= x+y, \\
f_2 &= (a+c)(b+d), \quad & g_2 &= xy, \\
f_3 &= ac+bd, \quad & h &= (a-c)(b-d)(x-y), \\
f_4 &= abc+abd+acd+bcd, \\
f_5 &= abcd.
\end{aligned}$$

8 個の生成元は独立ではない

$$\boldsymbol{f_1^2 f_5 - f_1 f_3 f_4 + f_2 f_3^2 - 4 f_2 f_5 + f_4^2 = 0}$$

$$\boldsymbol{(4 f_1 f_4 - 4 f_2 f_3 - f_2^2 - 16 f_5)(g_1^2 - 4 g_2) + h^2 = 0}$$

$$\boldsymbol{\begin{aligned}&(2 f_1 f_4 - 2 f_2 f_3 - f_2^2 - 8 f_5 + 2 f_3^2 - 2 g_2^2)\\ &\qquad \times (g_1^2 - 2 g_2 + 2 f_3) - 2(f_1^2 - 2 f_2)(f_3^2 - g_2^2)\\ &\qquad\qquad + f_2(2 f_2 f_3 - g_1 h) = 0\end{aligned}}$$

$\mathbf{3}$ 番目は，四面体の体積 $= 0$ の式

$$(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)(a^2c^2 - b^2d^2)$$

$$+(a^2 - d^2)(b^2 - c^2)x^2 - (a^2 - b^2)(c^2 - d^2)y^2$$

$$-(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)x^2y^2 + x^2y^2(x^2 + y^2)$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & y^2 \\ 1 & a^2 & 0 & x^2 & d^2 \\ 1 & b^2 & x^2 & 0 & c^2 \\ 1 & y^2 & d^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

定理

二つの４角形が合同 $\Longleftrightarrow$ 8 個の不変量の値が一致

４角形が長方形 $\Longleftrightarrow f_1^2 - 2f_2 = 4f_3 = 4g_2 = g_1^2$

４角形が円に内接 $\Longleftrightarrow f_i, g_j, h$ で定まるある量 $= 0$

４角形が凹 $\Longleftrightarrow f_i, g_j, h$ で定まるある量 > 0

４角形の面積 $\Longleftrightarrow f_i, g_j, h$ の式で表せる

ラングルの問題を扱うには長さの２乗をベース
にした方が式が簡単になる

$$
\begin{aligned}
F_1 &= a^2+b^2+c^2+d^2, \quad G_1 = x^2+y^2,\\
F_2 &= (a^2+c^2)(b^2+d^2), \quad G_2 = x^2y^2,\\
F_3 &= a^2c^2+b^2d^2,\\
F_4 &= a^2b^2c^2+a^2b^2d^2+a^2c^2d^2+b^2c^2d^2,\\
F_5 &= a^2b^2c^2d^2,\\
H &= (a^2-c^2)(b^2-d^2)(x^2-y^2).
\end{aligned}
$$

この場合の関係式

$$F_1^2F_5 - F_1F_3F_4 + F_2F_3^2 - 4F_2F_5 + F_4^2 = 0$$

$$(4F_1F_4 - 4F_2F_3 - F_2^2 - 16F_5)(G_1^2 - 4G_2) + H^2 = 0$$

$$2(F_1F_3 - F_1G_2 - F_3G_1 + G_1G_2) + F_2G_1 - 4F_4 + H = 0$$

(従って，H は不要)

ラングルの問題を座標で取り扱う

４角形 $A_1A_2A_3A_4 \Longrightarrow$ ４角形 $B_1B_2B_3B_4$

を座標で計算する(１回分の変換)

A_i の座標を (a_i, b_i), B_i の座標を $(\overline{a}_i, \overline{b}_i)$ とする

$$I[a^2] = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 & b_1 & 1 \\ a_2^2 & a_2 & b_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & b_3 & 1 \\ a_4^2 & a_4 & b_4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{I[ab]} = \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1 & b_1 & 1 \\ a_2b_2 & a_2 & b_2 & 1 \\ a_3b_3 & a_3 & b_3 & 1 \\ a_4b_4 & a_4 & b_4 & 1 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{I[b^2]} = \begin{vmatrix} b_1^2 & a_1 & b_1 & 1 \\ b_2^2 & a_2 & b_2 & 1 \\ b_3^2 & a_3 & b_3 & 1 \\ b_4^2 & a_4 & b_4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overline{I}[a^2] = \begin{vmatrix} \overline{a}_1^2 & \overline{a}_1 & \overline{b}_1 & 1 \\ \overline{a}_2^2 & \overline{a}_2 & \overline{b}_2 & 1 \\ \overline{a}_3^2 & \overline{a}_3 & \overline{b}_3 & 1 \\ \overline{a}_4^2 & \overline{a}_4 & \overline{b}_4 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{etc.}$$

アファァイン変換

４角形 $A_1A_2A_3A_4 \Longrightarrow$ ４角形 $B_1B_2B_3B_4$

は実はアファァイン変換で写る(M.F.Mammana-B.Micale, Math. Gazette, (2008))

$$\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = -\frac{I[a^2]+I[b^2]}{2(I[a^2]I[b^2]-I[ab]^2)} \begin{pmatrix} I[b^2] & -I[ab] \\ -I[ab] & I[a^2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$+$ 平行移動

不変量 K

K = このアファイン変換の行列式，とする

$$K = \frac{(I[a^2] + I[b^2])^2}{4(I[a^2]I[b^2] - I[ab]^2)}$$

これがラングルの問題における相似比になる

$\Longrightarrow$ 最も基本的な不変量

アファイン変換により

$$\overline{I}[a^2] = K^2 I[b^2], \quad \overline{I}[ab] = -K^2 I[ab],$$
$$\overline{I}[b^2] = K^2 I[a^2]$$

従って

$$\overline{I}[a^2] + \overline{I}[b^2] = K^2(I[a^2] + I[b^2]),$$
$$\overline{I}[a^2]\overline{I}[b^2] - \overline{I}[ab]^2 = K^4(I[a^2]I[b^2] - I[ab]^2),$$
$$\overline{K} = K$$

不変量による表示

$$\left(I[a^2] + I[b^2]\right)^2$$

$$= \tfrac{1}{4}\{-a^4c^4 - b^4d^4 - x^4y^4 + 2(a^2b^2c^2d^2 + a^2c^2x^2y^2 + b^2d^2x^2y^2\}$$

$$= \tfrac{1}{4}(ac + bd + xy)(-ac + bd + xy)$$

$$\times(ac - bd + xy)(ac + bd - xy)$$

$$= F_5 - \frac{1}{4}(F_3 - G_2)^2$$

$$
\begin{aligned}
& I[a^2]I[b^2] - I[ab]^2 \\
&= \tfrac{1}{16}\{(a^2+c^2)(b^2+d^2)(a^2c^2+b^2d^2) - a^2c^2(a^4+c^4) \\
&\quad -b^2d^2(b^4+d^4) - 3(a^4c^4+b^4d^4) + 2a^2b^2c^2d^2 \\
&\quad +2(a^2-b^2+c^2-d^2)(a^2c^2-b^2d^2)(x^2+y^2) \\
&\quad +(a^2-d^2)(b^2-c^2)x^4 - (a^2-b^2)(c^2-d^2)y^4 - x^4y^4\} \\
&= \tfrac{1}{16}\{-F_1^2F_3 + F_1F_4 + 2F_2F_3 - F_3^2 + 4F_5 + 2(F_1F_3 - 2F_4)G_1 \\
&\quad +\tfrac{1}{2}(F_2 - 2F_3)(G_1^2 - 2G_2) + \tfrac{1}{2}HG_1 - G_2^2\}
\end{aligned}
$$

ラングルの問題の解答

４角形 $A_1A_2A_3A_4 \Longrightarrow$ ４角形 $B_1B_2B_3B_4$

４角形 $B_1B_2B_3B_4 \Longrightarrow$ ４角形 $C_1C_2C_3C_4$

の二つのアファイン変換を合成する．　はじめの変換は

$$\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = -\frac{I[a^2] + I[b^2]}{2(I[a^2]I[b^2] - I[ab]^2)} \begin{pmatrix} I[b^2] & -I[ab] \\ -I[ab] & I[a^2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$+$ 平行移動

二つ目の変換は

$$\begin{pmatrix} \overline{\overline{x}} \\ \overline{\overline{y}} \end{pmatrix} = -\frac{\overline{I}[a^2] + \overline{I}[b^2]}{2(\overline{I}[a^2]\overline{I}[b^2] - \overline{I}[ab]^2)} \begin{pmatrix} \overline{I}[b^2] & -\overline{I}[ab] \\ -\overline{I}[ab] & \overline{I}[a^2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}$$

$+$ **平行移動**

$$= -\frac{K^2(I[a^2] + I[b^2])}{2K^4(I[a^2]I[b^2] - I[ab]^2)} K^2 \begin{pmatrix} I[a^2] & I[ab] \\ I[ab] & I[b^2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$+$ **平行移動**

従って合成は

$$\begin{pmatrix} \overline{\overline{x}} \\ \overline{\overline{y}} \end{pmatrix} = \frac{(I[a^2]+I[b^2])^2}{4(I[a^2]I[b^2]-I[ab]^2)^2}(I[a^2]I[b^2]-I[ab]^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$+ \text{ 平行移動}$$

$$= K\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \text{ 平行移動}$$

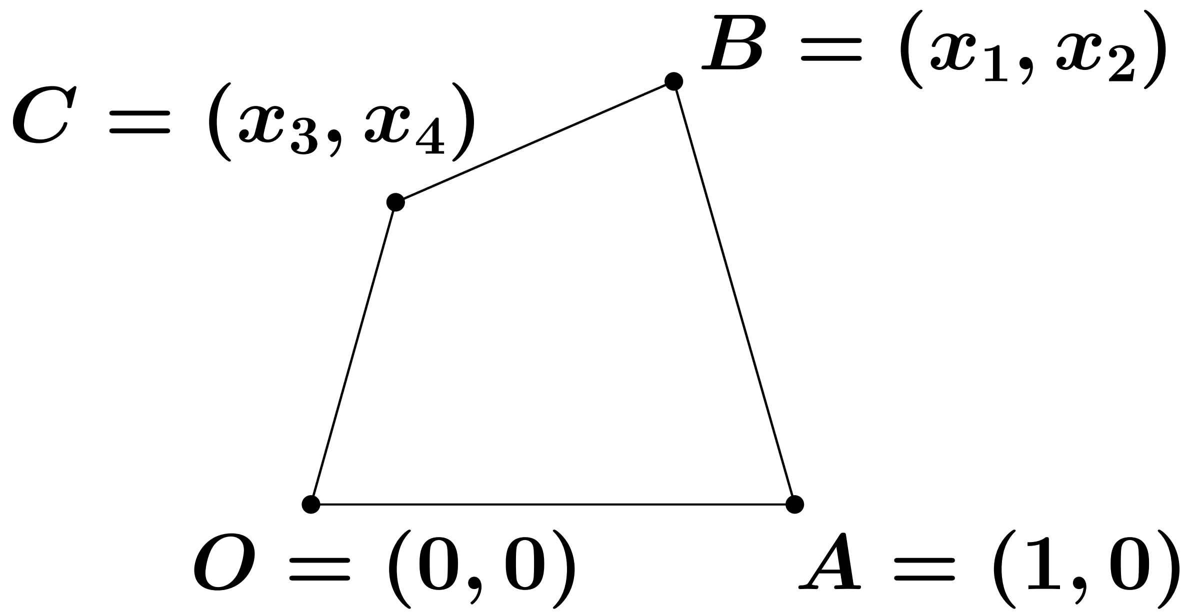
ここまでのまとめ

$$X = \begin{pmatrix} I[a^2] & I[ab] \\ I[ab] & I[b^2] \end{pmatrix}$$ から作った不変量

$$K = \frac{(\mathrm{Tr}\ X)^2}{4\det X}$$ が重要

- K の分子 $= 0 \Longleftrightarrow$ ４角形が円に内接
- K の分母 $= 0 \Longleftrightarrow$ ４角形が３角形に退化

４角形の相似類のモジュライ空間



O, A : fix, $\quad B, C$: free

$\Longrightarrow$ モジュライは <u>４次元</u>

２つの４角形が相似

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{F_1^2}{G_2},\quad \frac{F_2}{G_2},\quad \frac{F_3}{G_2},\quad \frac{F_4^2}{G_2^3},\quad \frac{F_5}{G_2^2},\quad \frac{G_1^2}{G_2}$$

の６つの値が一致

$$\frac{F_1^2}{G_2} = \frac{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}{x^2y^2} \quad \text{etc.}$$

次の５つの量は相似変換＋ラングル変換で不変

$$\frac{F_3}{G_2}, \quad \frac{(F_1 - 2G_1)^2}{G_2}, \quad \frac{F_1G_1 - F_2 - G_1^2}{G_2}, \quad \frac{F_5}{G_2^2},$$

$$\frac{F_3(-F_1^2 + 2F_2 + F_1G_1) + F_4(F_1 - 2G_1)}{G_2^2}$$

具体的には

$$\frac{F_3}{G_2} = \frac{a^2c^2 + b^2d^2}{x^2y^2}, \quad \frac{F_5}{G_2^2} = \frac{a^2b^2c^2d^2}{x^4y^4},$$

$$\frac{(F_1 - 2G_1)^2}{G_2} = \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2x^2 - 2y^2)^2}{x^2y^2}$$

相似不変性は明らか ••

主張

・５つの不変量が一致 $\Longleftrightarrow$ ２つの４角形は相似変換またはラングル変換で写りあう

・５つの不変量のうち，どの４個をとっても関数的に独立

・ラングル変換で写りあう２つの４角形は，不変式論的にはほとんど相似(離散的な違いしかない)

証明に必要な恒等式

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 & b_1 & 1 \\ a_2^2 & a_2 & b_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & b_3 & 1 \\ a_4^2 & a_4 & b_4 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1^2 & a_1 & b_1 & 1 \\ b_2^2 & a_2 & b_2 & 1 \\ b_3^2 & a_3 & b_3 & 1 \\ b_4^2 & a_4 & b_4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1 & b_1 & 1 \\ a_2b_2 & a_2 & b_2 & 1 \\ a_3b_3 & a_3 & b_3 & 1 \\ a_4b_4 & a_4 & b_4 & 1 \end{vmatrix}^2$$

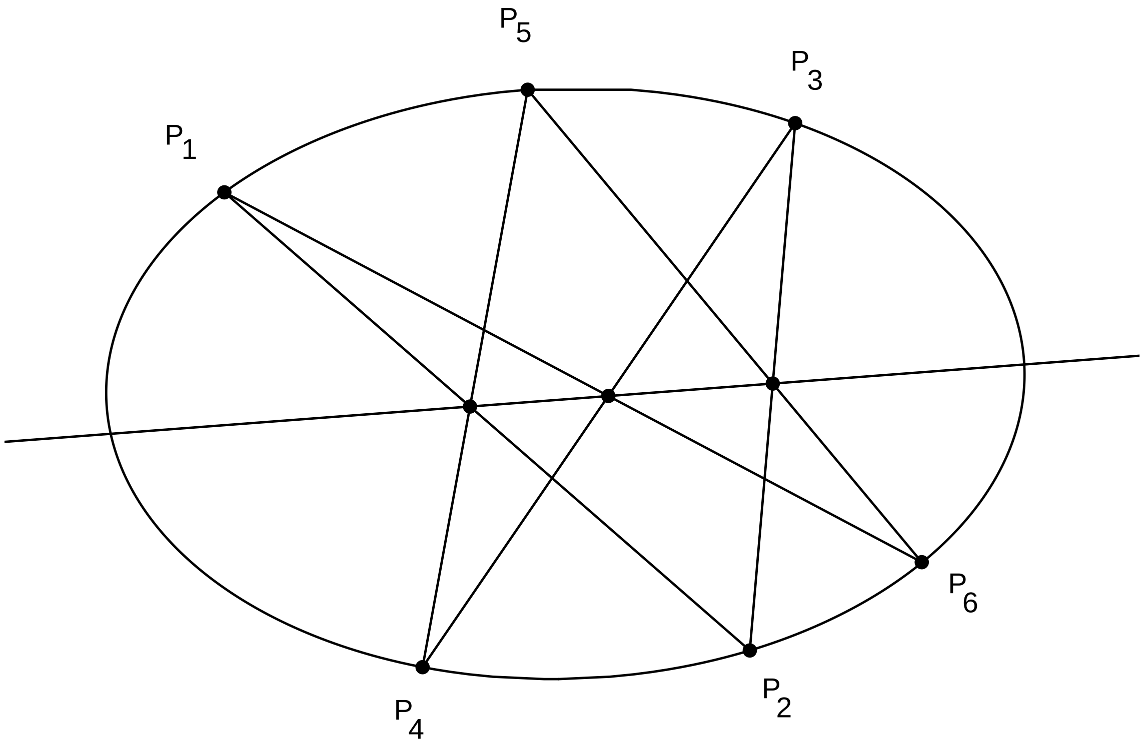
$$= - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \\ a_4 & b_4 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \\ a_4 & b_4 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_4 & b_4 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Pascal の定理の場合の恒等式

$$
\begin{vmatrix}
\begin{vmatrix}
\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_4 & x_5 \\ y_4 & y_5 \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} y_4 & y_5 \\ z_4 & z_5 \end{vmatrix}
\end{vmatrix}
&
\begin{vmatrix}
\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_5 & x_6 \\ y_5 & y_6 \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} y_5 & y_6 \\ z_5 & z_6 \end{vmatrix}
\end{vmatrix}
&
\begin{vmatrix}
\begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_6 & x_1 \\ y_6 & y_1 \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} y_3 & y_4 \\ z_3 & z_4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} y_6 & y_1 \\ z_6 & z_1 \end{vmatrix}
\end{vmatrix}
\\
\begin{vmatrix}
\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} y_4 & y_5 \\ z_4 & z_5 \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_4 & z_5 \\ x_4 & x_5 \end{vmatrix}
\end{vmatrix}
&
\begin{vmatrix}
\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} y_5 & y_6 \\ z_5 & z_6 \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_5 & z_6 \\ x_5 & x_6 \end{vmatrix}
\end{vmatrix}
&
\begin{vmatrix}
\begin{vmatrix} y_3 & y_4 \\ z_3 & z_4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} y_6 & y_1 \\ z_6 & z_1 \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} z_3 & z_4 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_6 & z_1 \\ x_6 & x_1 \end{vmatrix}
\end{vmatrix}
\\
\begin{vmatrix}
\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_4 & z_5 \\ x_4 & x_5 \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_4 & x_5 \\ y_4 & y_5 \end{vmatrix}
\end{vmatrix}
&
\begin{vmatrix}
\begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_5 & z_6 \\ x_5 & x_6 \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_5 & x_6 \\ y_5 & y_6 \end{vmatrix}
\end{vmatrix}
&
\begin{vmatrix}
\begin{vmatrix} z_3 & z_4 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_6 & z_1 \\ x_6 & x_1 \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_6 & x_1 \\ y_6 & y_1 \end{vmatrix}
\end{vmatrix}
\end{vmatrix}
$$

$$= - \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 & x_6^2 \\ y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 & y_4^2 & y_5^2 & y_6^2 \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & z_4^2 & z_5^2 & z_6^2 \\ x_1y_1 & x_2y_2 & x_3y_3 & x_4y_4 & x_5y_5 & x_6y_6 \\ y_1z_1 & y_2z_2 & y_3z_3 & y_4z_4 & y_5z_5 & y_6z_6 \\ z_1x_1 & z_2x_2 & z_3x_3 & z_4x_4 & z_5x_5 & z_6x_6 \end{vmatrix}$$

Pascal の定理



２つの課題

(1) 恒等式の成立する理由

(2) 幾何学的に重要な不変量は離散的に現れる

例えば,

$$\frac{(F_1 - kG_1)^2}{G_2}$$

がラングル変換で不変$\Longleftrightarrow k = 2$

$\Longrightarrow$ 何が重要な不変量か?それをどう把握するか?