レビ平坦面上の函数論：平坦円周束における事例研究 (無限次元性について) [1]

足立真訓

東京理大・理工 [2]

2017 年 3 月 25 日

[1] 2019 年 3 月 8 日「第 26 回沼津改め静岡研究会 –幾何，数理物理，そして量子論–」における講演の参考資料. 元は 2017 年春の学会の講演スライド.

[2] 現所属: 静岡大・理

無限次元性

X: **複素多様体**, $\Omega \subset X$: **領域.** $\mathcal{O}(\Omega)$: **正則函数環.**

問題 (広義の Levi 問題)

$\partial\Omega$ **のどのような幾何が** $\mathcal{O}(\Omega)$ **をどのように定量的に統制するか？**

Toy case:

- $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. $\mathbb{C}$, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.
- $\dim \mathcal{O}(\mathbb{C}) = \infty$. $\dim \mathcal{O}(\mathbb{D}) = \infty$.
- $\dim \mathcal{O} \cap L^\infty(\mathbb{C}) = 1 \neq \dim \mathcal{O} \cap L^\infty(\mathbb{D}) = \infty$.
  ($\because$) **Liouville. / Riemann の除去可能定理 + 最大値原理.** $\square$
  ($\because$) $\mathbb{D} \Subset \mathbb{C}$. $\mathbb{C}$ **上の正則函数の制限は,** $\mathbb{D}$ **上の有界正則函数.** $\square$
- $\partial\mathbb{C} = \{\infty\}$, $\partial\mathbb{D} = S^1$.

強擬凸面と Levi 平坦面

(X, J): **複素多様体,** $\Omega \subset X$: **領域.** $M = \partial\Omega$: **滑らかな実超曲面.**

定義 (Levi 擬凸性)

$T_M^{1,0} \simeq T_M \cap JT_M \subset T_M$ **を Levi 分布と呼ぶ.**

M **が強擬凸面** $:\Longleftrightarrow$ **Levi 分布が正の接触構造を定める.**
M **が Levi 平坦面** $:\Longleftrightarrow$ **Levi 分布が葉層構造 (Levi 葉層) を定める.**

例: $X = \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$.

- $\Omega = \{(z', z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \operatorname{Im} z_n > \|z'\|^2\}$: **強擬凸.**
- $\Omega = \{(z', z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \operatorname{Im} z_n > 0\}$: **Levi 平坦.** $M = \bigsqcup_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{C}^{n-1} \times \{t\}$.

Grauert:

- $\Omega \Subset X$, M: **強擬凸** $\Longrightarrow$ $\dim \mathcal{O}(\Omega) = \infty$.
  さらに Ω **は Stein 空間の固有改変で,** $\dim \mathcal{O} \cap L^\infty(\Omega) = \infty$.
- $\exists\Omega \Subset X$ **s.t.** M: **Levi 平坦かつ** $\dim \mathcal{O}(\Omega) = 1$ **(定数のみ！).**

閉 Riemann 面上の正則円板束と平坦円周束

Σ: 種数 2 以上の閉 Riemann 面．普遍被覆 $\Sigma \simeq \mathbb{D}/\pi_1(\Sigma)$ を固定．
$\rho\colon \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{CP}^1), \mathrm{Diffeo}^+(S^1)$**: 表現．**

定義 (suspension)

$$
\begin{aligned}
X_\rho &:= \Sigma \times_\rho \mathbb{CP}^1 && := \mathbb{D} \times \mathbb{CP}^1/(z, w) \sim (\gamma z, \rho(\gamma) w) \text{ for } \gamma \in \pi_1(\Sigma).\\
\Omega_\rho &:= \Sigma \times_\rho \mathbb{D} && := \mathbb{D} \times \mathbb{D}/\pi_1(\Sigma).\\
M_\rho &:= \Sigma \times_\rho S^1 && := \mathbb{D} \times S^1/\pi_1(\Sigma).
\end{aligned}
$$

- **第一射影により X_ρ, Ω_ρ, M_ρ は Σ 上の $\mathbb{CP}^1$ 束, $\mathbb{D}$ 束, S^1 束．**
  さらにこれらは平坦束．水平な円板 $\mathbb{D} \times \{t\}$ ($t \in \mathbb{CP}^1$) の族が X_ρ 上に Riemann 面による正則葉層を誘導する．
- **特に, M_ρ はこの正則葉層の安定集合であり, Levi 平坦面である．**

Grauert, Diederich–大沢の定理

Σ: 閉 Riemann 面 (種数 $\geq$2), $\rho\colon \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$: 表現, $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.
$\pi_1(\Sigma) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, $\gamma \mapsto \alpha \circ \rho(\gamma) \circ \alpha^{-1}$ を ρ の α による共役と呼ぶ.
共役をとっても, X_ρ, Ω_ρ, M_ρ は同型.

定理 (Grauert, Diederich–大沢)

1. **ρ が回転表現に共役でない $\Longrightarrow$ Ω_ρ は Stein 空間の固有改変.**
2. **ρ が有理回転表現に共役 $\Longrightarrow$ Ω_ρ は正則凸だが, Stein でない.**
3. **ρ が無理回転を含む回転表現に共役 $\Longrightarrow$ $\dim \mathcal{O}(\Omega_\rho) = 1$.**

例

1. **$\rho(\gamma) = \gamma$ (被覆変換), $[\rho] \in \mathcal{T}(\Sigma)$ (Teichmüller 空間).**
2. **$\rho(\gamma) \equiv$ 恒等変換 $\Longrightarrow$ $\Omega_\rho = \Sigma \times \mathbb{D}$. $\mathcal{O}(\Omega_\rho) = \mathcal{O}(\mathbb{D})$.**

一定の幾何学的状況下では, Levi 平坦面の囲む領域においても正則函数の存在が保証され, Levi 問題を定量的に考えることができる.

$\mathbb{CP}^2$ 内の Levi 平坦面の非存在予想

予想

1. $\mathbb{CP}^2$ 上の余次元 1 特異正則葉層 $\widetilde{\mathcal{F}}$ を考える．どの葉の閉包にも $\widetilde{\mathcal{F}}$ の特異点が含まれるであろう．
2. $\mathbb{CP}^2$ 内に，滑らかな閉 Levi 平坦面は存在しないであろう．

- (Poincaré–Bendixson) $\mathbb{RP}^2$ 上のフローを考える．流線の閉包には特異点または周期軌道が含まれる．
- (Cerveau) 前者の反例 $\widetilde{\mathcal{F}}$ があれば，非自明な極小集合 $\mathcal{M}$ が存在する．$\mathcal{M}$ はホロノミーに制約を受けるか，実解析的 Levi 平坦面．
- 逆に，実解析的 Levi 平坦面があれば，解析接続し反例 $\widetilde{\mathcal{F}}$ が得られる．
- (Lins Neto, Siu) $\mathbb{CP}^{\geq 3}$ では予想が成立．極小集合，Levi 平坦面の補集合が Stein であること (武内) に基づく．

正則法束

$\Omega \Subset X$, $\partial\Omega = M$: 滑らかな Levi 平坦面. $\mathcal{F}$: Levi 葉層.

定義（正則法束）

$$N_M^{1,0} := (T_X^{1,0}|M)/T_M^{1,0} \approx \mathbb{C} \otimes T_M/T_{\mathcal{F}}.$$

- (Brunella, 大沢, Biard–Iordan) 3 次元以上のコンパクト Kähler 多様体内には正則法束 $N_M^{1,0}$ が正 (:$\iff$ $\mathcal{F}$ に沿って正曲率を持つ) の滑らかな閉 Levi 平坦面 M は存在しない.
- $N_M^{1,0}$ が正であれば, Ω は Stein 空間の固有改変.
- 正則円板束においては ρ が回転表現に共役でないとき, $N_{M_\rho}^{1,0}$ は半正. 特に, $[\rho] \in \mathcal{T}(\Sigma)$ のとき, $N_{M_\rho}^{1,0}$ は正となる.
- つまり, $\mathbb{CP}^2$ 内の非存在予想に対しては, $\mathbb{CP}^{\geq 3}$ の論法は通じない. 我々は, 広義の Levi 問題からのアプローチを試みる.

問題

Σ: **閉 Riemann 面 (種数 $\geq$2)**, $\rho\colon \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$: **表現.**
$X_\rho \supset \Omega_\rho$, M_ρ, $\Omega'_\rho := X_\rho \setminus \overline{\Omega_\rho}$. $\mathcal{F}_\rho$: M_ρ **の Levi 葉層.** $N^{1,0}_{M_\rho}$: **正則法束.**

問題

ρ **を動かし,** Ω_ρ, Ω'_ρ **上の正則函数の空間,** M_ρ **上の CR 函数の空間について, 定量的な制約の下での無限次元性を調べよ. また, そのメカニズムに** $\mathcal{F}_\rho$ **のエルゴード性,** $N^{1,0}_{M_\rho}$ **の幾何はどのように関与するか.**

- **(主結果 4) Levi 平坦面の囲む領域の標準束の Bergman 空間の無限次元性に着目し,** $\mathbb{CP}^2$ **内の閉 Levi 平坦面に関する曲率制約を改善した (Brinkschulte 氏との共同研究).**
- **(主結果 5)** $\rho(\gamma) = \gamma$ **(被覆変換) の時, 詳しいことが分かってきた.**

Bergman 空間

$\Omega \Subset X$, $M = \partial\Omega$: **滑らか.** dV: X **上の体積形式.**
$\delta : X \to \mathbb{R}$, $\Omega = \{\delta > 0\}$, $d\delta \neq 0$ **on** $\partial\Omega$. $\alpha \geq -1$.

定義 (重み付き Bergman 空間, Hardy 空間)

$$A^2_\alpha(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ 正則} \mid \langle f, f\rangle_\alpha < \infty\},$$
$$\langle f, g\rangle_\alpha := \begin{cases} \int_\Omega f\overline{g}\delta^\alpha dV/\Gamma(\alpha+1) & \textbf{for } \alpha > -1, \\ \lim_{\alpha \searrow -1}\langle f, g\rangle_\alpha & \textbf{for } \alpha = -1. \end{cases}$$

Hardy 空間 ($\alpha = -1$) は L^2 境界値を持つ正則函数の空間.
境界値は M 上の CR 函数を定める.

Levi 平坦面上の CR 函数

$(M, \mathcal{F})$: **コンパクト Levi 平坦 CR 多様体, i.e.,**
M: **コンパクト実多様体,** $\mathcal{F}$: **複素多様体による実余次元 1 葉層構造.**

定義 (CR 函数)

$\mathcal{F}$ **に沿って正則な函数を CR 函数と呼ぶ.**

- **CR 函数の葉の横断方向の regularity は自動的に保証されない.**
- **(稲葉)** M **上の連続な CR 函数は, 全ての葉上定数である. 特に, 稠密葉が存在すれば, 連続な CR 函数は定数函数に限る.**
- **(主結果 1)** M **上の有理型 CR 函数の空間 (滑らかな CR 直線束の CR 切断) の無限次元性・有限次元性は, 同一の直線束においても横断方向に要求する可微分性によって変動する.**

Liouville 性

Σ: 閉 Riemann 面 (種数 $\geq$2), $\rho_0 \colon \pi_1(\Sigma) \to \underline{\mathrm{Aut}}(\mathbb{D}), \gamma \mapsto \gamma$ (被覆変換).
$X := X_{\rho_0}$, $\Omega := \Omega_{\rho_0}$, $M := M_{\rho_0}$, $\Omega' := X_{\rho_0} \setminus \overline{\Omega_{\rho_0}}$.

系 (E. Hopf のエルゴード性定理)

Ω, Ω' **は Liouville, i.e.,** $\dim \mathcal{O} \cap L^\infty(\Omega) = \dim \mathcal{O} \cap L^\infty(\Omega') = 1$.

証明

- f **を** Ω **または** Ω' **上の有界正則函数とする.**
- **Fatou の定理から,** f **は** M **上に境界値を持ち,** f **は** M **の葉層に沿って正則であり, 特にその実部・虚部は調和.**
- M **は** Σ **の単位接束となめらかに同型で,** M **の葉層は** Σ **上の Poincaré 計量に関する測地流の不安定葉層と同型.**
- **測地流の Lebesgue 測度に関するエルゴード性から, 葉層に沿う有界調和函数は a.e. で定数. したがって,** f **は定数.** $\square$

別証明に後で触れる. ${}_3F_2$ **の性質に帰着される.**

Hardy 空間・Bergman 空間における有限・無限次元性

- $\mathcal{O}(\Omega) \simeq \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D} \times \mathbb{D}) \mid f(z,w) = f(\gamma z, \gamma w), \gamma \in \pi_1(\Sigma)\}$.
  $\mathcal{O}(\Omega') \simeq \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D} \times \mathbb{D}) \mid f(z,w) = f(\gamma z, \overline{\gamma} w), \gamma \in \pi_1(\Sigma)\}$.
- **L. Garnett による精密化により,** $\dim A^2_{-1}(\Omega) = \dim A^2_{-1}(\Omega') = 1$.

系 (Berndtsson–Charpentier の定理)

$$\dim A^2_\alpha(\Omega) = \dim A^2_\alpha(\Omega') = \infty, \quad \forall \alpha > -1/2.$$

- $1/2$ **は** Ω, Ω' **の Diederich–Fornaess 指数. 境界値** 0 **を持つ非自明な (強) 多重劣調和函数の境界における Hölder 連続性の最良値.**
- **(主結果 2, 3 の系) Diederich–Fornaess 指数としては 1/2 が最良. この事実は, Levi 葉層の調和測度の絶対連続性, 測地流の Lebesgue 測度に関するエルゴード性に相当する.**

主結果 5

主結果 5 + α (A., arXiv:1703.08165 + in preparation.)

$$\exists I : \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0(\Sigma, K_\Sigma^{\otimes n}) \hookrightarrow \mathcal{O}(\Omega), \quad \exists I' : \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{Ker}(\Delta - \lambda_n I) \hookrightarrow \mathcal{O}(\Omega')$$

ここで，Δ を Σ 上の Poincaré 計量に関する Laplacian として，

$$H^0(\Sigma, K_\Sigma^{\otimes n}) := \{\Sigma \text{ 上の正則 } n \text{ 次微分} \psi = \psi(\tau)(d\tau)^{\otimes n}\},$$
$$\mathrm{Ker}(\Delta - \lambda_n I) := \{f : \Sigma \to \mathbb{C} \mid \Delta f = \lambda_n f\}.$$

I，I' の像は広義一様収束位相で稠密であり，さらに $\forall\alpha > -1$ に対し，$A^2_\alpha(\Omega)$，$A^2_\alpha(\Omega')$ に含まれる．

主結果 5 の証明の概略

- Ω は因子 $D = \{(z,z) \mid z \in \mathbb{D}\}/\pi_1(\Sigma) \simeq \Sigma$ を含む.
- Ω' は totally real 部分多様体 $D' := \{(z,\bar{z}) \mid z \in \mathbb{D}\}/\pi_1(\Sigma) \approx \Sigma$ を含み, その複素化 (最大直径の Grauert tube) となっている.

$I\colon \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0(\Sigma, K_\Sigma^{\otimes n}) \hookrightarrow \mathcal{O}(\Omega)$ を $\psi \in H^0(\Sigma, K_\Sigma^{\otimes n})$, $n \geq 1$ に対し,

$$I(\psi)(z,w) := \int_z^w \frac{1}{B(n,n)} \left(\frac{(w-\tau)(\tau-z)}{(w-z)d\tau} \right)^{\otimes(n-1)} \psi(\tau)(d\tau)^{\otimes n}$$

で定める. $\psi = \psi(\tau)(d\tau)^{\otimes n}$ は不変被覆 $\mathbb{D}_\tau$ 上で表示している. 複比の性質から, well-defined である.

$I'\colon \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{Ker}(\Delta - \lambda_n I) \hookrightarrow \mathcal{O}(\Omega')$ は与えられた函数 $f \in \mathrm{Ker}(\Delta - \lambda_n I)$ を D' 上の実解析的函数とみなし, $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ へ解析接続して定める. 一般論から well-defined であることが従う. (cf. Krötz–Schlichtkrull, '09)

可積分性の証明の概略

I は，次の抽象的構成の結果として得られた：$\psi \in H^0(\Sigma, K_\Sigma^{\otimes n})$ を同型

$$K_\Sigma \simeq T_\Sigma^* \simeq T_D^* \simeq N_{D/\Omega}^*, \quad D = \{(z,z) \mid z \in \mathbb{D}\}/\pi_1(\Sigma) \subset \Omega,$$

を利用して，$D \subset \Omega$ に沿う正則函数の n 次のジェットとみなし，このジェットを L^2 ノルムが最小となるように Ω 上に拡張する．

第 1 段 (方程式の導出) $\mathbb{D}_z \times \mathbb{D}_w$ 上の非正則な座標 (z,t) を $t := (w-z)(1-\bar{z}w)^{-1}$ で定める．$f = f(z,w) \in \mathcal{O}(\Omega)^{\pi_1(\Sigma)}$ を t を用いて展開 $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) t^n$ すると，係数 $\{f_n\}$ は次を満たす：

$$\frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}} + \frac{nz}{1-|z|^2} f_n + \frac{n-1}{1-|z|^2} f_{n-1} = 0.$$

$\varphi_n := f_n(z) \left(\frac{\sqrt{2}dz}{1-|z|^2}\right)^{\otimes n} \in C^{(0,0)}(\Sigma, K_\Sigma^n)$ とおけば，$\{\varphi_n\}$ は方程式

$$\bar{\partial}\varphi_0 = 0, \quad \bar{\partial}\varphi_n = -\frac{n-1}{\sqrt{2}} \varphi_{n-1} \otimes \omega \ (n \geq 1)$$

を満たす．ここで $\omega = 2dz \otimes d\bar{z}/(1-|z|^2)^2$.

可積分性の証明の概略 (続)

第 2 段. $\psi \in H^0(\Sigma, K_\Sigma^{\otimes N})$ **に対し,** $\varphi_n := 0$ **(**$n < N$**),** $\varphi_N := \psi$ **と定める.**

$$\bar\partial \varphi_n = -\frac{n-1}{\sqrt{2}} \varphi_{n-1} \otimes \omega$$

の L^2 **ノルム最小解を順次取り, 帰納的に** φ_n **(**$n > N$**) を定める. ラプラシアンの固有函数分解を利用すると,** φ_n **の次の表示が得られる:**

$$\begin{aligned}\varphi_{N+m} &= \bar\partial^*_{N+m} G^{(1)}_{N+m} \left(-\frac{N+m-1}{\sqrt{2}} \varphi_{N+m-1} \otimes \omega \right) \\ &= -\frac{\sqrt{2}(N+m-1)}{m(2N+m-1)} \bar\partial^*_{N+m} \left(\varphi_{N+m-1} \otimes \omega \right)\end{aligned}$$

ここで $\bar\partial^*_n$ **は** $\bar\partial : C^{(0,0)}(\Sigma, K_\Sigma^{\otimes n}) \to C^{(0,1)}(\Sigma, K_\Sigma^{\otimes n})$ **の形式的随伴,** $G^{(1)}_n$ **は** $C^{(0,1)}(\Sigma, K_\Sigma^{\otimes n})$ **上の Green 作用素.**

可積分性の証明の概略 (続)

第 3 段. 形式解 $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) t^n$, $\varphi_n = f_n(z)\left(\frac{\sqrt{2}dz}{1-|z|^2}\right)^{\otimes n}$ の $L^2_\alpha(\Omega)$, $\delta := 1 - \left|\frac{w-z}{1-\bar{z}w}\right|^2$, $dV = \frac{4}{|1-\bar{z}w|^4}\frac{i}{2}dz \wedge d\bar{z} \wedge \frac{i}{2}dw \wedge d\bar{w}$ での収束は,

$$
\begin{aligned}
\|f\|_\alpha^2 &= \pi \sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi_n\|^2 \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+2)} \\
&= \pi \sum_{m=0}^{\infty} \|\varphi_{N+m}\|^2 \frac{\Gamma(N+m+1)}{\Gamma(N+m+\alpha+2)} \\
&= \pi \|\psi\|^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(N+m+1)}{\Gamma(N+m+\alpha+2)} \frac{(2N-1)!}{\{(N-1)!\}^2} \frac{\{(N+m-1)!\}^2}{m!(2N+m-1)!} \\
&= \pi \|\psi\|^2 \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(N+2+\alpha)} {}_3F_2\left(\begin{matrix} N+1, N, N \\ 2N, N+2+\alpha \end{matrix}; 1\right) < \infty.
\end{aligned}
$$

から $\alpha > -1$ で従う. f の正則性も同様の計算から従う. なお, $\alpha = -1$ では収束しないことから, Ω の Liouville 性が従う.

可積分性の証明の概略 (終)

第 4 段.

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)t^n = \int_z^w \frac{1}{B(N,N)} \left(\frac{(w-\tau)(\tau-z)}{(w-z)d\tau} \right)^{\otimes(N-1)} \psi(\tau)(d\tau)^{\otimes N}$$

を示すには, $\{0\} \times \mathbb{D}$ **上で直接計算すれば十分:**

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} f_n(0)t^n &= \frac{(2N-1)!}{(N-1)!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(N+m-1)!}{(2N+m-1)!} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \psi}{\partial z^m}(0) t^{N+m} \\
&= \frac{(2N-1)!}{(N-1)!} t^N \int_0^1 dt_N \ldots \int_0^{t_3} dt_2 \int_0^{t_2} t_1^{N-1} \psi(tt_1) dt_1 \\
&= \frac{(2N-1)!}{(N-1)!} t^N \int_0^1 \frac{t_1^{N-1}(1-t_1)^{N-1}}{(N-1)!} \psi(tt_1) dt_1 \\
&= \int_0^t \frac{1}{B(N,N)} \left(\frac{(t-\tau)\tau}{t} \right)^{(N-1)} \psi(\tau) d\tau. \quad \square
\end{aligned}$$

Bergman 核の級数表示

A^2_α の再生核 B_α を重み付き Bergman 核と呼ぶ．A^2_α の正規直交基底 $e_1, e_2, \dots$ を 1 つ取ると，$B_\alpha(z,w) = \sum_{j=1}^\infty e_j(z)\overline{e_j(w)}$.

主結果 5 の系 (Forelli–Rudin 型の構成)

Ω の重み付き Bergman 核は

$$B_\alpha((z,w);(z',w')) = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\pi^2(4g-4)} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{c_{n,\alpha}}\frac{1}{B(n,n)^2}\int_{\tau\in\overline{zw}}\int_{\tau'\in\overline{z'w'}} \frac{B_n(\tau,\tau')(d\tau\otimes\overline{d\tau'})^{\otimes n}}{([w,\tau,z]\otimes\overline{[w',\tau',z']})^{\otimes(n-1)}}.$$

ただし，g は Σ の種数，$B_n(\tau,\tau')(d\tau\otimes\overline{d\tau})^{\otimes n}$ は Σ の n 次微分に関する (i.e. $H^0(\Sigma, K_\Sigma^{\otimes n})$ の) Bergman 核であり，

$$c_{n,\alpha} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2+\alpha)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix} n+1, n, n \\ 2n, n+2+\alpha \end{matrix}; 1\right), [w,\tau,z] = \frac{(w-z)d\tau}{(w-\tau)(\tau-z)}.$$