

# (一般) 枠付き曲面の測地線について

高橋 雅朋 (室蘭)

第31回 沼津改め静岡研究会

— 幾何, 複素解析, そして数理物理 —

2026年3月3日 (火) ~ 3月5日 (木)

# 枠付き曲面の縮閉面と伸開面について

高橋 雅朋（室蘭工業大学）

中津山 希（室蘭工業大学）との共同研究

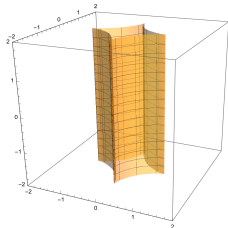
第30回 沼津改め静岡研究会

2025年3月25日（火）～3月28日（金）

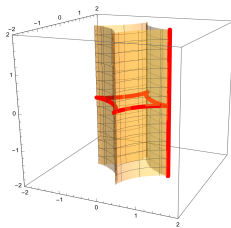
\*記録によると沼津で初めて講演したのは  
2005年「第13回 沼津研究集会」であり、  
2004年の第12回から参加させてもらっていました。

# 動機

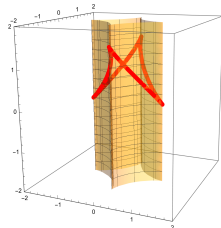
- 特異点を持つ曲線・曲面の微分幾何学的研究
- 今回は、特異点を持つ曲面の測地線の定式化について



$$(\cos^3 u, \sin^3 u, v)$$



測地線の例



測地線の例

## 特異点を持つ曲面の測地線の定義の難しさ

- 1 直接的な定義の拡張ではダメ。つまり、滑らかな部分を繋げれば良いというアイデアは使えない。
- 2 枠付き曲線となる条件が必要。

## 【Wikipedia（測地線から抜粋）】

- 1697年，ヨハン・ベルヌーイは，曲面上の2点をその曲面上で結び，その長さを最小にする問題を考え，このような長さの最も短い曲線を，この曲面上の測地線（geodesic）と呼んだ．そして，測地線上の点での接平面の法線がその点で曲面に垂直であることを発見した．
- 1698年，ヤコブ・ベルヌーイは円筒，円錐，回転面上の測地線を求めた．
- 1728年，レオンハルト・オイラーは自身の開発した変分法を用いて，曲面上の測地線が満たす微分方程式を導出した．
- 典型的な測地線は，測地学の対象でもある地球上の2点を結ぶ最短曲線である．ただし，地球を単純に球面であるとする．
- 球面では測地線は閉曲線となるが，回転楕円体面上など一般には測地線は閉曲線とならない．

## コンテンツと参考文献

(一般) 枠付き曲面と枠付き曲線を用いて, 測地線を定義する.

- 1 正則曲面の測地線
- 2 枠付き曲面と枠付き曲線 . . . [R1], [R2]
- 3 枠付き曲面の測地線 . . . [R3]
- 4 一般枠付き曲面と測地線 . . . [R4]

R1 T. Fukunaga, M. Takahashi, Framed surfaces in the Euclidean space. Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) 50 (2019), 37–65.

R2 S. Honda, M. Takahashi, Framed curves in the Euclidean space. Adv. Geom. 16 (2016), no. 3, 265–276.

R3 M. Takahashi, On geodesics of framed surfaces in the Euclidean 3-space. Tohoku Math. J. 76 (2024), no. 2, 199–215.

R4 M. Takahashi, H. Yu, On generalised framed surfaces in the Euclidean space. AIMS Math. 9 (2024), no. 7, 17716–17742.

# 1. 正則曲面の測地線

記号の整理を行います。以下、基本的に、全て  $C^\infty$  とする。

$\mathbb{R}^3$  : 3次元ユークリッド空間

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$  に対して,

●  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$  : 内積

●  $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$  : ノルム (大きさ)

●  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$  : 外積

●  $U \subset \mathbb{R}^2$  : 単連結開集合

●  $S^2 = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{a}| = 1\}$  : 単位球面

$\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  : 正則曲面とすると

$\mathbf{n} : U \rightarrow S^2 : C^\infty$  : ガウス写像, 単位法線ベクトル, つまり,

$\mathbf{n}(u, v) = \mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v) / |\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)|.$

# 1. 正則曲面の測地線

曲面  $x(U) \subset \mathbb{R}^3$  上の測地線は

- $\gamma : I \rightarrow U$  : 正則平面曲線,  $I \subset \mathbb{R}$  : 区間
- $\tilde{\gamma} : I \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^3$  を  $\tilde{\gamma}(t) = x \circ \gamma(t)$  と書く.

$\tilde{\gamma}$  は正則空間曲線, つまり,  $\dot{\tilde{\gamma}}(t) = (d\tilde{\gamma}/dt)(t) \neq 0, \forall t \in I$  である.

## 定義 (測地線)

$\tilde{\gamma}$  が  $x(U)$  上の測地線  $\iff \tilde{\gamma}$  の加速度 (2階微分) の接方向  $\ddot{\tilde{\gamma}}(t)^T$  の係数が消えている. つまり,  $\ddot{\tilde{\gamma}}(t)$  と  $n(\gamma(t))$  が平行,  $\forall t \in I$ .

**例**: 球面の測地線は大円であることが知られている.

$\tilde{\gamma}$  は単位速度 (や弧長パラメータ) と仮定しないが, 次が成り立つ.

## 命題 (一定速度)

測地線  $\tilde{\gamma}$  は一定速度 (constant speed) になる.

# 1. 正則曲面の測地線

## 注意：

もし、測地線が特異点を持った場合、命題から測地線は点になる。よって、直接的な一般化は適切ではない。

正則平面曲線  $\gamma : I \rightarrow U$  を  $\gamma(t) = (u(t), v(t))$  とすると、 $x(U)$  上の測地線は次の正規2階常微分方程式系を満たす：

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) + \Gamma_{11}^1(\gamma(t))\dot{u}^2(t) + 2\Gamma_{12}^1(\gamma(t))\dot{u}(t)\dot{v}(t) + \Gamma_{22}^1(\gamma(t))\dot{v}^2(t) = 0, \\ \ddot{v}(t) + \Gamma_{11}^2(\gamma(t))\dot{u}^2(t) + 2\Gamma_{12}^2(\gamma(t))\dot{u}(t)\dot{v}(t) + \Gamma_{22}^2(\gamma(t))\dot{v}^2(t) = 0, \quad \forall t \in I \end{cases}$$

ここで、 $\Gamma_{jk}^i$ ,  $i, j, k = 1, 2$  はクリストッフェル記号。

- 正規2階常微分方程式系なので、一般論から、初期値（曲面上の点と初速度）を与えると、測地線は局所的には一意的に存在することが分かる。

# 1. 正則曲面の測地線

パラメータ変換により、速度は変わるので、測地線と測地線の軌跡は区別する必要がある。

## 定義（前測地線, Pre-geodesic）

$\tilde{\gamma}$  が前測地線  $\iff \tilde{\gamma}$  に対して、パラメータ変換  $t$  が存在して  $\tilde{\gamma} \circ t$  が測地線になる。

## 命題（前測地線の存在条件）

$\tilde{\gamma}$  が前測地線  $\iff$  測地曲率  $\kappa_g(t) = \frac{\det(\dot{\tilde{\gamma}}(t), \ddot{\tilde{\gamma}}(t), \mathbf{n}(\tilde{\gamma}(t)))}{|\dot{\tilde{\gamma}}(t)|^3} = 0, \forall t \in I.$

\*正則曲面の場合は、大体の微分幾何学の教科書に書いてある。

## 2. 枠付き曲面と枠付き曲線

- $U \subset \mathbb{R}^2$  : 単連結開集合
- $\Delta = \{(a, b) \in S^2 \times S^2 \mid a \cdot b = 0\}$  : 3次元多様体

### 定義 (枠付き曲面とルジャンドル曲面)

- $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ : **枠付き曲面**  
(( $\mathbf{x}, \mathbf{n}$ ) :  $U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2$ : **ルジャンドル曲面**)  $\iff$   
 $\mathbf{x}_u(u, v) \cdot \mathbf{n}(u, v) = \mathbf{x}_v(u, v) \cdot \mathbf{n}(u, v) = 0, \forall (u, v) \in U.$
- $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ : **枠付き基曲面** ( $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ : **フロントアル**)  
 $\iff \exists (\mathbf{n}, \mathbf{s}) : U \rightarrow \Delta$  が存在して  $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})$ : **枠付き曲面**.  
( $\exists \mathbf{n} : U \rightarrow S^2$  が存在して  $(\mathbf{x}, \mathbf{n}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2$ : **ルジャンドル曲面**.)

- ★ 定義から**枠付き基曲面**は**フロントアル**.
- ★ 局所的には**フロントアル**は**枠付き基曲面**.

## 2. 枠付き曲面と枠付き曲線

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  を枠付き曲面とすると

$\Rightarrow \{\boldsymbol{n}(u, v), \boldsymbol{s}(u, v), \boldsymbol{t}(u, v) := \boldsymbol{n}(u, v) \times \boldsymbol{s}(u, v)\}$  が  $\boldsymbol{x}(u, v)$  の**動標構**である。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_u \\ \boldsymbol{x}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{n}_{u_i} \\ \boldsymbol{s}_{u_i} \\ \boldsymbol{t}_{u_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e_i & f_i \\ -e_i & 0 & g_i \\ -f_i & -g_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{t} \end{pmatrix}$$

ここで  $a_i, b_i, e_i, f_i, g_i : U \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2$  は関数,  $u_1 = u, u_2 = v$ .

### 定義 (基本不変量)

これらの関数を  $a_i, b_i, e_i, f_i, g_i$  を枠付き曲面の**基本不変量**という。上の行列を  $\mathcal{G}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  とすると  $(\mathcal{G}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  も**基本不変量**という。

可積分条件  $\boldsymbol{x}_{uv} = \boldsymbol{x}_{vu}$ ,  $\mathcal{F}_{2u} - \mathcal{F}_{1v} = \mathcal{F}_1\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1$  を満たす。

## 2. 枠付き曲面と枠付き曲線

### 定義 (枠付き曲線と枠付き基曲線)

- $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ : **枠付き曲線**  
 $\iff \dot{\gamma}(t) \cdot \nu_i(t) = 0, i = 1, 2, \forall t \in I.$
- $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ : **枠付き基曲線**  $\iff \exists (\nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \Delta$  が存在して  
 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ : **枠付き曲線**.

$\Rightarrow \{\nu_1(t), \nu_2(t), \mu(t) := \nu_1(t) \times \nu_2(t)\}$  が  $\gamma(t)$  の **動標構** である.  
**フルネ・セレ型公式** :

$$\begin{pmatrix} \dot{\nu}_1(t) \\ \dot{\nu}_2(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ell(t) & m(t) \\ -\ell(t) & 0 & n(t) \\ -m(t) & -n(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix}, \dot{\gamma}(t) = \alpha(t)\mu(t).$$

### 定義 (枠付き曲線の曲率)

$(\ell, m, n, \alpha) : I \rightarrow \mathbb{R}^4$  を **(枠付き曲線の) 曲率** という.

## 2. 枠付き曲面と枠付き曲線

### 定義 (ルジャンドル曲線)

$(f, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$ : **ルジャンドル曲線**

$$\iff \dot{f}(t) \cdot \nu(t) = 0, \forall t \in I.$$

$\Rightarrow \{\nu(t), \mu(t) := J(\nu(t))\}$  が  $f(t)$  の**動標構**である.

ここで,  $J$  は  $\mathbb{R}^2$  上の左  $\pi/2$  回転とする.

**フルネ型公式:**

$$\begin{pmatrix} \dot{\nu}(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ell(t) \\ -\ell(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix}, \dot{f}(t) = \beta(t)\boldsymbol{\mu}(t)$$

### 定義 (ルジャンドル曲線の曲率)

$(\ell, \beta) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  を **(ルジャンドル曲線の) 曲率**という.

### 3. 枠付き曲面の測地線

- $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  : 枠付き曲面,  $\mathbf{n} \times \mathbf{s} = \mathbf{t}$   
 $(a_i, b_i, e_i, f_i, g_i)$  : 基本不変量,
- $\gamma : I \rightarrow U, \gamma(t) = (u(t), v(t))$  : 正則平面曲線
- $\tilde{\gamma} = \mathbf{x} \circ \gamma, \tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \circ \gamma, \tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{s} \circ \gamma, \tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{t} \circ \gamma$  と置く. また,  
 $(\tilde{a}_i, \tilde{b}_i, \tilde{e}_i, \tilde{f}_i, \tilde{g}_i) = (a_i, b_i, e_i, f_i, g_i) \circ \gamma$  とする.

#### 命題 (枠付き曲線の条件)

$(\tilde{\gamma}, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  が枠付き曲線, ここで,  
 $\nu_1 = \tilde{\mathbf{n}}, \nu_2 = \cos \theta \tilde{\mathbf{s}} + \sin \theta \tilde{\mathbf{t}}, \theta : I \rightarrow \mathbb{R}$  : 関数  $\iff \exists \theta : I \rightarrow \mathbb{R}$  :  
関数が存在して

$$(\tilde{a}_1(t)\dot{u}(t) + \tilde{a}_2(t)\dot{v}(t)) \cos \theta(t) + (\tilde{b}_1(t)\dot{u}(t) + \tilde{b}_2(t)\dot{v}(t)) \sin \theta(t) = 0,$$

$\forall t \in I$  が成り立つ.

### 3. 枠付き曲面の測地線

#### 命題 (さっきの枠付き曲線の曲率)

$(\tilde{\gamma}, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  を枠付き曲線とする。ここで、  
 $\nu_1 = \tilde{n}_1, \nu_2 = \cos \theta \tilde{s} + \sin \theta \tilde{t}, \theta : I \rightarrow \mathbb{R}. \mu = \nu_1 \times \nu_2$ . 枠付き曲線の曲率  $(\ell, m, n, \alpha)$  は次で与えられる。

$$\begin{aligned}\ell(t) &= (\tilde{e}_1(t)\dot{u}(t) + \tilde{e}_2(t)\dot{v}(t)) \cos \theta(t) + (\tilde{f}_1(t)\dot{u}(t) + \tilde{f}_2(t)\dot{v}(t)) \sin \theta(t), \\ m(t) &= -(\tilde{e}_1(t)\dot{u}(t) + \tilde{e}_2(t)\dot{v}(t)) \sin \theta(t) + (\tilde{f}_1(t)\dot{u}(t) + \tilde{f}_2(t)\dot{v}(t)) \cos \theta(t), \\ n(t) &= \dot{\theta}(t) + \tilde{g}_1(t)\dot{u}(t) + \tilde{g}_2(t)\dot{v}(t), \\ \alpha(t) &= -(\tilde{a}_1(t)\dot{u}(t) + \tilde{a}_2(t)\dot{v}(t)) \sin \theta(t) + (\tilde{b}_1(t)\dot{u}(t) + \tilde{b}_2(t)\dot{v}(t)) \cos \theta(t).\end{aligned}$$

#### 定義 (枠付き曲面の測地線)

$(\tilde{\gamma}, \nu_1, \nu_2)$  が  $(x, n, s)$  の測地線

$$\iff \dot{\mu}(t) \text{ と } \tilde{n}(t) \text{ が平行, つまり, } \dot{\mu}(t) \times \tilde{n}(t) = 0, \forall t \in I.$$

### 3. 枠付き曲面の測地線

#### 定理 (測地線の条件)

次は同値である.

- (1)  $(\tilde{\gamma}, \nu_1, \nu_2)$  は  $(x, n, s)$  の測地線である.
- (2)  $n(t) = \dot{\theta}(t) + \tilde{g}_1(t)\dot{u}(t) + \tilde{g}_2(t)\dot{v}(t) = 0, \forall t \in I.$
- (3)  $\kappa_g(t) := \det(\mu(t), \dot{\mu}(t), \tilde{n}(t)) = 0, \forall t \in I.$

#### 注意:

$(\tilde{\gamma}, \nu_1, \nu_2)$  が  $(x, n, s)$  の測地線とする.

- もし  $x$  が正則曲面,  $\tilde{\gamma}$  が正則曲線ならば  $\tilde{\gamma}$  は  $x(U)$  の前測地線である. さらに, もし  $\tilde{\gamma}$  が弧長パラメータなら,  $\tilde{\gamma}$  は正則曲面  $x(U)$  として測地線である.
- 枠付き曲面の測地線はパラメータ変換において不変である. また, 枠付き曲面と枠付き曲線の枠回転においても不変である.

### 3. 枠付き曲面の測地線

準備:

- $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ : 枠付き曲面,  
 $(a_i, b_i, e_i, f_i, g_i)$ : 基本不変量,
- $\gamma : I \rightarrow U, \gamma(t) = (u(t), v(t))$ : 正則平面曲線

枠付き曲面の測地線は、2つの微分方程式（**枠付き曲線の条件**と**測地線の条件**）を解けばよい。関数  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$  が存在して、

- $(\tilde{a}_1(t)\dot{u}(t) + \tilde{a}_2(t)\dot{v}(t)) \cos \theta(t) + (\tilde{b}_1(t)\dot{u}(t) + \tilde{b}_2(t)\dot{v}(t)) \sin \theta(t) = 0,$
- $\dot{\theta}(t) + \tilde{g}_1(t)\dot{u}(t) + \tilde{g}_2(t)\dot{v}(t) = 0, \forall t \in I$

$\Rightarrow (\tilde{\gamma}, \nu_1, \nu_2)$  は  $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})$  の測地線である。

ここで、 $\tilde{\gamma} = \mathbf{x} \circ \gamma, \nu_1 = \tilde{\mathbf{n}}, \nu_2 = \cos \theta \tilde{\mathbf{s}} + \sin \theta \tilde{\mathbf{t}}$ .

$\gamma$  は正則平面曲線なので、パラメータ変換により  $u(t) = t$ , または、 $v(t) = t$  とできる。

### 3. 枠付き曲面の測地線

もし,  $\cos \theta(t) \neq 0, u(t) = t, \tilde{b}_1(t) + \tilde{b}_2(t)\dot{v}(t) \neq 0, \forall t \in I$

$$\Rightarrow \tan \theta(t) = -\frac{\tilde{a}_1(t) + \tilde{a}_2(t)\dot{v}(t)}{\tilde{b}_1(t) + \tilde{b}_2(t)\dot{v}(t)}, \quad \theta(t) = \text{Tan}^{-1} \left( -\frac{\tilde{a}_1(t) + \tilde{a}_2(t)\dot{v}(t)}{\tilde{b}_1(t) + \tilde{b}_2(t)\dot{v}(t)} \right).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{\theta}(t) &= \frac{1}{(\tilde{a}_1(t) + \tilde{a}_2(t)\dot{v}(t))^2 + (\tilde{b}_1(t) + \tilde{b}_2(t)\dot{v}(t))^2} \\ &\quad \left( -(\dot{\tilde{a}}_1(t) + \dot{\tilde{a}}_2(t)\dot{v}(t) + \tilde{a}_2(t)\ddot{v}(t))(\tilde{b}_1(t) + \tilde{b}_2(t)\dot{v}(t)) \right. \\ &\quad \left. + (\tilde{a}_1(t) + \tilde{a}_2(t)\dot{v}(t))(\dot{\tilde{b}}_1(t) + \dot{\tilde{b}}_2(t)\dot{v}(t) + \tilde{b}_2(t)\ddot{v}(t)) \right), \end{aligned}$$

ここで,  $\dot{\tilde{a}}_i(t) = a_{iu}(t, v(t)) + a_{iv}(t, v(t))\dot{v}(t),$

$$\dot{\tilde{b}}_i(t) = b_{iu}(t, v(t)) + b_{iv}(t, v(t))\dot{v}(t), \quad i = 1, 2.$$

### 3. 枠付き曲面の測地線

$\Rightarrow \dot{\theta}(t) + \tilde{g}_1(t)\dot{v}(t) + \tilde{g}_2(t)\dot{v}(t) = 0$  は

$$\begin{aligned} & - (\dot{\tilde{a}}_1(t) + \dot{\tilde{a}}_2(t)\dot{v}(t) + \tilde{a}_2(t)\ddot{v}(t))(\tilde{b}_1(t) + \tilde{b}_2(t)\dot{v}(t)) \\ & + (\tilde{a}_1(t) + \tilde{a}_2(t)\dot{v}(t))(\dot{\tilde{b}}_1(t) + \dot{\tilde{b}}_2(t)\dot{v}(t) + \tilde{b}_2(t)\ddot{v}(t)) \\ & + \left( (\tilde{a}_1(t) + \tilde{a}_2(t)\dot{v}(t))^2 + (\tilde{b}_1(t) + \tilde{b}_2(t)\dot{v}(t))^2 \right) (\tilde{g}_1(t) + \tilde{g}_2(t)\dot{v}(t)) \\ & = 0 \end{aligned}$$

と同値である。この方程式は  $v(t)$  に関する**非正規 (implicit) 2階常微分方程式**であり、解  $v(t)$  があれば、 $(\tilde{\gamma}, \nu_1, \nu_2)$  は  $(x, n, s)$  の測地線となる。

- 非正規系 2 階常微分方程式の一般論は存在しない（少なくとも僕は知らない）ので、一般的に解の存在や一意性は成り立たない（実際に一意性が成立しない例があります）。

### 3. 例：枠付き曲面の測地線

- $(f, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$  : ルジャンドル曲線,  $(\ell, \beta) : \text{曲率}$   
 $f(u) = (x(u), y(u)), \nu(u) = (a(u), b(u)).$

例 (円柱的曲面):  $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  : 枠付き曲面

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u), y(u), v),$$

$$\mathbf{n}(u, v) = (a(u), b(u), 0),$$

$$\mathbf{s}(u, v) = (0, 0, 1)$$

$$\Rightarrow \mathbf{t}(u, v) = \mathbf{n}(u, v) \times \mathbf{s}(u, v) = (b(u), -a(u), 0).$$

$$\begin{pmatrix} a_1(u, v) & b_1(u, v) \\ a_2(u, v) & b_2(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta(u) \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} e_1(u, v) & f_1(u, v) & g_1(u, v) \\ e_2(u, v) & f_2(u, v) & g_2(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\ell(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 3. 例：枠付き曲面の測地線

$\gamma : I \rightarrow I \times \mathbb{R}, \gamma(t) = (u(t), v(t))$  : 正則平面曲線,  $\exists \theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,

- $(\tilde{a}_1(t)\dot{u}(t) + \tilde{a}_2(t)\dot{v}(t)) \cos \theta(t) + (\tilde{b}_1(t)\dot{u}(t) + \tilde{b}_2(t)\dot{v}(t)) \sin \theta(t) = \dot{v}(t) \cos \theta(t) - \beta(u(t))\dot{u}(t) \sin \theta(t) = 0$ ,
- $\dot{\theta}(t) + \tilde{g}_1(t)\dot{u}(t) + \tilde{g}_2(t)\dot{v}(t) = \dot{\theta}(t) = 0, \forall t \in I$

$\Rightarrow \theta$  は定数,  $(\tilde{\gamma}, \nu_1, \nu_2)$  は  $(x, n, s)$  の測地線, ここで,

$\tilde{\gamma} = x \circ \gamma, \nu_1 = \tilde{n}, \nu_2 = \cos \theta \tilde{s} + \sin \theta \tilde{t}$ .

★  $\sin \theta = 0, v(t) = c$  : 定数  $u(t) = t \Rightarrow (\tilde{\gamma}, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ ,

$\tilde{\gamma}(t) = (x(t), y(t), c), \nu_1(t) = \tilde{n}(t), \nu_2(t) = \tilde{s}(t)$  は測地線

★  $\cos \theta = 0, u(t) = c$  : 定数  $v(t) = t \Rightarrow (\tilde{\gamma}, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ ,

$\tilde{\gamma}(t) = (x(c), y(c), t), \nu_1(t) = \tilde{n}(t), \nu_2(t) = \tilde{t}(t)$  は測地線

### 3. 例：枠付き曲面の測地線

具体的にルジャンドル曲線  $(f, \nu) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$  として、アステロイド

$$f(u) = (\cos^3 u, \sin^3 u), \nu(u) = (\sin u, \cos u).$$

曲率  $(\ell(u), \beta(u)) = (-1, 3 \cos u \sin u)$ .

•  $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ ,

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos^3 u, \sin^3 u, v), \mathbf{n}(u, v) = (\sin u, \cos u, 0), \mathbf{s}(u, v) = (0, 0, 1).$$

★  $\sin \theta = 0, \cos \theta = 0$  以外に,

$$\star \dot{v}(t) \cos \theta - \beta(u(t)) \dot{u}(t) \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow u(t) = t, \cos \theta \neq 0, v(t) = -\frac{3 \tan \theta}{2} \sin^2 t + c$$

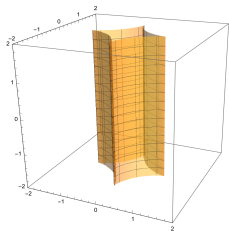
### 3. 例：枠付き曲面の測地線

$$\tilde{\gamma}(t) = \left( \cos^3 u, \sin^3 u, -\frac{3 \tan \theta}{2} \sin^2 t + c \right),$$

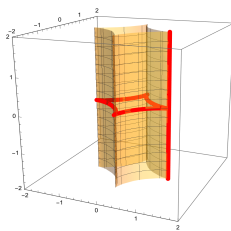
$$\nu_1(t) = (\sin t, \cos t, 0),$$

$$\nu_2(t) = \cos \theta(0, 0, 1) + \sin \theta(-\cos t, \sin t, 0)$$

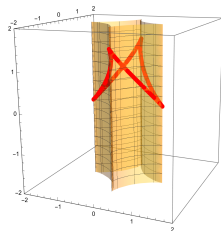
は  $(x, n, s)$  の測地線である。



$$(\cos^3 u, \sin^3 u, v)$$



$$\sin \theta = 0, \cos \theta = 0$$



$$\theta = -\pi/4, c = 0$$

### 3. 例：枠付き曲面の測地線

**例** ( $z$ -軸の回転面)  $(z, \mathbf{n}^z, \mathbf{s}^z) : I \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  : 枠付き曲面

$$\begin{aligned}z(u, v) &= (x(u) \cos v, x(u) \sin v, z(u)), \\ \mathbf{n}^z(u, v) &= (a(u) \cos v, a(u) \sin v, b(u)), \\ \mathbf{s}^z(u, v) &= (\sin v, -\cos v, 0)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{t}^z(u, v) = \mathbf{n}^z(u, v) \times \mathbf{s}^z(u, v) = (b(u) \cos v, b(u) \sin v, -a(u)).$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_1(u, v) & b_1(u, v) \\ a_2(u, v) & b_2(u, v) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -\beta(u) \\ -x(u) & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} e_1(u, v) & f_1(u, v) & g_1(u, v) \\ e_2(u, v) & f_2(u, v) & g_2(u, v) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -\ell(u) & 0 \\ -a(u) & 0 & b(u) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

### 3. 例：枠付き曲面の測地線

$$\exists \theta : I \rightarrow \mathbb{R},$$

- $(\tilde{a}_1(t)\dot{u}(t) + \tilde{a}_2(t)\dot{v}(t)) \cos \theta(t) + (\tilde{b}_1(t)\dot{u}(t) + \tilde{b}_2(t)\dot{v}(t)) \sin \theta(t) = -x(u(t))\dot{v}(t) \cos \theta(t) - \beta(u(t))\dot{u}(t) \sin \theta(t) = 0,$
- $\dot{\theta}(t) + \tilde{g}_1(t)\dot{u}(t) + \tilde{g}_2(t)\dot{v}(t) = \dot{\theta}(t) + b(u(t))\dot{v}(t) = 0, \forall t \in I$

$\Rightarrow (\tilde{\gamma}, \nu_1, \nu_2)$  は  $(z, n^z, s^z)$  の測地線である。ここで、

$$\tilde{\gamma} = z \circ \gamma, \nu_1 = \tilde{n}^z, \nu_2 = \cos \theta \tilde{s}^z + \sin \theta \tilde{t}^z.$$

\*  $\theta(t) = 0, v(t) = c$  : 定数,  $u(t) = t \Rightarrow (\tilde{\gamma}, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$

$$\tilde{\gamma}(t) = (x(t) \cos c, x(t) \sin c, z(t)),$$

$$\nu_1(t) = \tilde{n}^z(t) = (a(t) \cos c, a(t) \sin c, b(t)),$$

$$\nu_2(t) = \tilde{s}^z(t) = (\sin c, -\cos c, 0)$$

は  $(z, n^z, s^z)$  の測地線である。

### 3. 例：枠付き曲面の測地線

具体的に、ルジャンドル曲線  $(f, \nu) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$  として、

$$f(u) = (x(u), u), \nu(u) = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}(u)^2 + 1}}(-1, \dot{x}(u)),$$

とする。ここで、 $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : C^\infty$  (解析的ではない)

$$x(u) = \begin{cases} e^{-1/u} & \text{if } u > 0, \\ 0 & \text{if } u \leq 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\ell(u), \beta(u)) = \left( -\frac{\ddot{x}(u)}{\dot{x}(u)^2 + 1}, -\sqrt{\dot{x}(u)^2 + 1} \right).$$

$f$  は正則平面曲線であり、 $u \leq 0$  のとき、 $(u, \nu)$  は  $z$  の特異点である。

### 3. 例：枠付き曲面の測地線

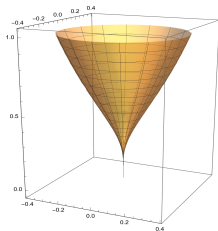
枠付き曲線  $(\tilde{\gamma}, \nu_1, \nu_2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ ,

$$\tilde{\gamma}(t) = (x(t) \cos c, x(t) \sin c, t),$$

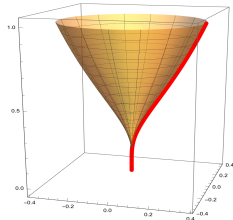
$$\nu_1(t) = \left( \frac{-\cos c}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + 1}}, \frac{-\sin c}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + 1}}, \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + 1}} \right),$$

$$\nu_2(t) = (\sin c, -\cos c, 0)$$

は  $(z, n^z, s^z)$  の測地線であり，原点  $(0, 0, 0)$  を通る速度  $(0, 0, 1)$  の測地線は一意ではない．よって測地線の一意性は一般的には成り立たない．



回転面



測地線の例

## 4. 一般枠付き曲面と測地線

枠付き曲面の測地線について考えた。さらに、より一般的な特異点を持つ曲面を考えてみたい。

- 正則曲面，枠付き曲面，一般枠付き曲面の関係：

正則曲面  $\subset$  枠付き曲面  $\subset$  一般枠付き曲面

- 正則曲面と枠付き曲面の違い：

正則曲面には特異点無く，枠付き曲面には存在してもよい。

- 枠付き曲面と一般枠付き曲面の違い：

枠付き曲面では単位法線ベクトル  $n$  をとれるが，一般枠付き曲面では取れない場合がある。

## 4. 一般枠付き曲面と測地線

$(\boldsymbol{x}, \nu_1, \nu_2) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta : C^\infty$ ,  $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v$  とする.

### 定義 (一般枠付き曲面)

$(\boldsymbol{x}, \nu_1, \nu_2) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  が**一般枠付き曲面**とは  $\exists \alpha, \beta : U \rightarrow \mathbb{R}$  が存在して  $\nu(u, v) = \alpha(u, v)\nu_1(u, v) + \beta(u, v)\nu_2(u, v), \forall (u, v) \in U$  となること.

- $\alpha(u, v) = \beta(u, v) = 0$  となる  $(u, v)$  で  $\boldsymbol{x}$  の特異点となる.
- $\alpha \equiv 0$  または  $\beta \equiv 0 \Rightarrow$  枠付き曲面である.

$\{\nu_1(u, v), \nu_2(u, v), \nu_3(u, v) := \nu_1(u, v) \times \nu_2(u, v)\}$  は  $\boldsymbol{x}(u, v)$  の**動標構**である.

## 4. 一般枠付き曲面と測地線

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_{1u_i} \\ \nu_{2u_i} \\ \nu_{3u_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e_i & f_i \\ -e_i & 0 & g_i \\ -f_i & -g_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$$

ここで  $a_i, b_i, c_i, e_i, f_i, g_i : U \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2$  は関数,  $u_1 = u, u_2 = v$ .  
ただし,  $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0$  が成り立つ.

### 定義 (基本不変量)

これらの関数を  $a_i, b_i, c_i, e_i, f_i, g_i$  を枠付き曲面の**基本不変量**という.  
上の行列を  $\mathcal{G}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  とすると  $(\mathcal{G}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  も**基本不変量**という.

可積分条件  $x_{uv} = x_{vu}, \mathcal{F}_{2u} - \mathcal{F}_{1v} = \mathcal{F}_1\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1$ . を満たす.

## 4. 一般枠付き曲面と測地線

例 (クロスキャップ,  $S_0$  特異点):  $(x, \nu_1, \nu_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  を

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v^2, uv), \quad \nu_1(u, v) = (0, -1, 0), \quad \nu_2(u, v) = \frac{(v, 0, -1)}{\sqrt{1+v^2}}.$$

$\mathbf{x}$  は  $(0, 0)$  で特異点であり,  $\nu(u, v) = \mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)$  は

$$\nu(u, v) = (-2v^2, -u, 2v) = uv\nu_1(u, v) - 2v\sqrt{1+v^2}\nu_2(u, v)$$

$\Rightarrow (x, \nu_1, \nu_2)$  は一般枠付き曲面である (枠付き曲面ではない).

$$\begin{pmatrix} a_1(u, v) & b_1(u, v) & c_1(u, v) \\ a_2(u, v) & b_2(u, v) & c_2(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{1+v^2} \\ -2v & \frac{-u}{\sqrt{1+v^2}} & \frac{uv}{\sqrt{1+v^2}} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} e_1(u, v) & f_1(u, v) & g_1(u, v) \\ e_2(u, v) & f_2(u, v) & g_2(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+v^2} \end{pmatrix}.$$

## 4. 一般枠付き曲面と測地線

**例** ( $S_1^\pm$  特異点) :  $(\mathbf{x}, \nu_1, \nu_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  を

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v^2, u^2v \pm v^3), \quad \nu_1(u, v) = (0, -1, 0), \quad \nu_2(u, v) = \frac{(2uv, 0, 1)}{\sqrt{1 + 4u^2v^2}}.$$

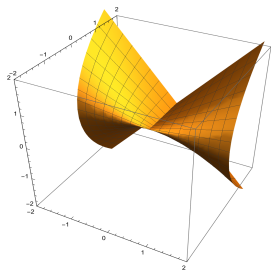
$\mathbf{x}$  は  $(0, 0)$  で特異点であり,  $\nu(u, v) = \mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)$  は

$$\begin{aligned} \nu(u, v) &= (-4uv^2, -u^2 \mp 3v^2, 2v) \\ &= (u^2 \pm 3v - 2)\nu_1(u, v) - 2v\sqrt{1 + 4u^2v^2}\nu_2(u, v) \end{aligned}$$

$\Rightarrow (\mathbf{x}, \nu_1, \nu_2)$  は一般枠付き曲面である (枠付き曲面ではない).

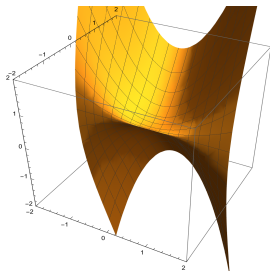
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1(u, v) & b_1(u, v) & c_1(u, v) \\ a_2(u, v) & b_2(u, v) & c_2(u, v) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{1 + 4u^2v^2} \\ -2v & \frac{-(u^2 \pm 3v^2)}{\sqrt{1 + 4u^2v^2}} & \frac{2uv(u^2 \pm 3v^2)}{\sqrt{1 + 4u^2v^2}} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} e_1(u, v) & f_1(u, v) & g_1(u, v) \\ e_2(u, v) & f_2(u, v) & g_2(u, v) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2v}{1 + 4u^2v^2} \\ 0 & 0 & \frac{2u}{1 + 4u^2v^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## 4. 一般枠付き曲面と測地線



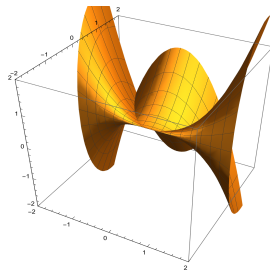
$$(u, v^2, uv)$$

クロスキャップ  $S_0$



$$(u, v^2, u^2v + v^3)$$

$S_1^+$  特異点



$$(u, v^2, u^2v - v^3)$$

$S_1^-$  特異点

- 2次元多様体から3次元多様体への可微分写像に対して、生成的 (generic) な特異点はクロスキャップであることが知られています (H. Whitney).

## 4. 一般枠付き曲面と測地線

- $(\mathbf{x}, \nu_1, \nu_2) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  : 一般枠付き曲面
- $\gamma : I \rightarrow U, \gamma(t) = (u(t), v(t))$  : 正則平面曲線
- $\tilde{\gamma}(t) = \mathbf{x}(\gamma(t)) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$

$\tilde{\gamma}(t)$  を  $t$  について微分すると,

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\gamma}}(t) &= \{\tilde{a}_1(t)\dot{u}(t) + \tilde{a}_2(t)\dot{v}(t)\}\tilde{\nu}_1(t) + \{\tilde{b}_1(t)\dot{u}(t) + \tilde{b}_2(t)\dot{v}(t)\}\tilde{\nu}_2(t) \\ &\quad + \{\tilde{c}_1(t)\dot{u}(t) + \tilde{c}_2(t)\dot{v}(t)\}\tilde{\nu}_3(t).\end{aligned}$$

ここで,  $(\tilde{\gamma}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  が枠付き曲線と仮定する.  
つまり,  $\dot{\tilde{\gamma}}(t) \cdot \mathbf{v}_i(t) = 0, i = 1, 2$  と仮定する.

**定義 (一般枠付き曲面の測地線)**

$(\tilde{\gamma}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  が  $(\mathbf{x}, \nu_1, \nu_2)$  の測地線

$\iff \dot{\mu}(t)$  と  $\tilde{\nu}(t)$  が平行, つまり,  $\dot{\mu}(t) \times \tilde{\nu}(t) = 0, \forall t \in I.$

ここで,  $\mu = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2, \tilde{\nu} = \nu \circ \gamma.$

## 4. 一般枠付き曲面と測地線

定義に従って計算すると、次が分かる.

例 (クロスキャップ,  $S_0$  特異点):  $(\mathbf{x}, \nu_1, \nu_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  を

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v^2, uv), \quad \nu_1(u, v) = (0, -1, 0), \quad \nu_2(u, v) = \frac{(v, 0, -1)}{\sqrt{1+v^2}},$$

$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (u(t), v(t))$  を正則平面曲線とし、さらに**解析的**と仮定する。  
枠付き曲線  $(\tilde{\gamma}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ ,

$$\tilde{\gamma}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t)) = (u(t), v^2(t), u(t)v(t))$$

$\gamma$  が正則平面曲線なので、 $\gamma(t) = (t, v(t))$  の場合、 $\tilde{\gamma}(t) = (t, v^2(t), tv(t))$  となる。

$$\mathbf{v}_1(t) = \frac{(-2v(t)\dot{v}(t), 1, 0)}{\sqrt{4v^2(t)\dot{v}^2(t) + 1}},$$

$$\mathbf{v}_2(t) = \frac{(-v(t) - t\dot{v}(t), -2v^2(t)\dot{v} - 2tv(t)\dot{v}^2(t), 1 + 4v^2(t)\dot{v}^2(t))}{\sqrt{(1 + 4v^2(t)\dot{v}^2(t) + v^2(t) + 2tv(t)\dot{v}(t) + t^2v^2(t))(4v^2(t)\dot{v}^2(t) + 1)}}.$$

## 4. 一般枠付き曲面と測地線

これより,  $\mu(t) = \mathbf{v}_1(t) \times \mathbf{v}_2(t)$  は,

$$\mu(t) = \frac{(1, 2v(t)\dot{v}(t), v(t) + t\dot{v}(t))}{\sqrt{f(t)}},$$

ここで,  $f(t) = 1 + 4v^2(t)\dot{v}^2(t) + v^2(t) + 2tv(t)\dot{v}(t) + t^2v^2(t)$  とおく.  $\dot{\mu}(t)$  は,

$$\begin{aligned}\dot{\mu}(t) &= \frac{(0, 2\dot{v}^2(t) + 2v(t)\ddot{v}(t), 2\dot{v}(t) + t\ddot{v}(t))}{\sqrt{f(t)}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\dot{f}(t)}{f(t)\sqrt{f(t)}} (1, 2v(t)\dot{v}(t), v(t) + t\dot{v}(t)).\end{aligned}$$

$\tilde{\nu}(t) = \nu(\gamma(t)) = \nu(t, v(t))$  より,  $\tilde{\nu}(t) = (-2v^2(t), -t, 2v(t))$  となる.

測地線の定義より,  $\dot{\mu}(t) \times \tilde{\nu}(t) = 0$  を計算する.

## 4. 一般枠付き曲面と測地線

$$\begin{aligned} & \dot{\mu}(t) \times \tilde{\nu}(t) \\ &= \left( 4v(t)\{\dot{v}^2(t) + v(t)\ddot{v}(t)\} + t\{2\dot{v}(t) + t\ddot{v}(t)\}, -2v^2(t)\{2\dot{v}(t) + t\ddot{v}(t)\}, \right. \\ & \quad \left. 4v^2(t)\{\dot{v}^2(t) + v(t)\ddot{v}(t)\} \right) - \frac{1}{2} \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} (4v^2(t)\dot{v}(t) + t\{v(t) + t\dot{v}(t)\}, \\ & \quad -2v(t) - 2v^2(t)\{v(t) + t\dot{v}(t)\}, -t + 4v^3(t)\dot{v}(t)) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) &= 8v(t)\dot{v}^3(t) + 8v^2(t)\dot{v}(t)\ddot{v}(t) + 3v(t)\dot{v}(t) \\ & \quad + 3t\dot{v}^2(t) + tv(t)\ddot{v}(t) + 2t^2\dot{v}(t)\ddot{v}(t). \end{aligned}$$

⇒ 測地線となる  $(t, v(t))$  は  $(t, 0)$  となり,  $\tilde{\gamma}(t) = (t, 0, 0)$  が測地線である。

同様に,  $\gamma(t) = (u(t), t)$  の場合は,  $(0, t)$  となり,  $\tilde{\gamma}(t) = (0, t^2, 0)$  が測地線である。

## 4. 一般粹付き曲面と測地線

例 ( $S_1^\pm$  特異点):  $(x, \nu_1, \nu_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  を,

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v^2, u^2v \pm v^3), \quad \nu_1(u, v) = (0, -1, 0), \quad \nu_2(u, v) = \frac{(2uv, 0, 1)}{\sqrt{1 + 4u^2v^2}}.$$

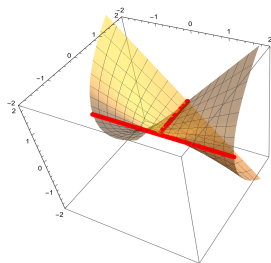
$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (u(t), v(t))$  を正則平面曲線とし, さらに**解析的**と仮定する.  
粹付き曲線  $(\tilde{\gamma}, \nu_1, \nu_2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$  に対して,  $\tilde{\gamma}(t)$  は,

$$\tilde{\gamma}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t)) = (u(t), v^2(t), u^2(t)v(t) \pm v^3(t))$$

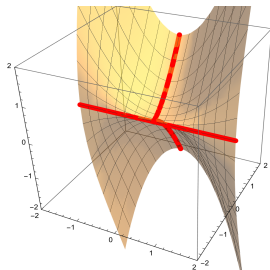
+ と - の場合それぞれでクロスキャップの測地線と同様に  $(t, v(t)), (u(t), t)$  について計算すると, + と - のどちらの場合も,

- $(t, v(t))$  では  $(t, 0)$  となり,  $\tilde{\gamma}(t) = (t, 0, 0)$  が測地線である.
- $(u(t), t)$  では  $(0, t)$  となり,  $\tilde{\gamma}(t) = (0, t^2, \pm t^3)$  が測地線である.

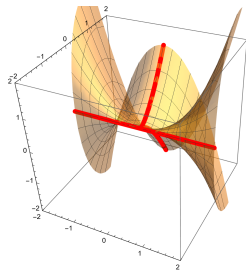
## 4. 一般枠付き曲面と測地線



$(u, v^2, uv)$   
クロスキャップ  
の測地線



$(u, v^2, u^2v + v^3)$   
 $S_0^+$  特異点  
の測地線



$(u, v^2, u^2v - v^3)$   
 $S_1^-$  特異点  
の測地線

# まとめと問題

## まとめ

- (一般) 枠付き曲面と枠付き曲線の特異点を持つ曲面と特異点を持つ曲線として考えた.
- (一般) 枠付き曲面の測地線を定式化した.

## 問題

- 一般枠付き曲面の場合の必要十分条件など性質の研究.
- 測地線と最短性の関係 (変分法による定式化).
- 局所的な定義のため, 大域的な定義や完備性, 閉測地線, カットローカスなどの研究.
- 非正規 2 階常微分方程式の理論構築.

ご清聴ありがとうございました.