

枠付き曲面の焦面と伸開面について

高橋 雅朋（室蘭）

中津山 希（室蘭工業大学）との共同研究

第30回 沼津改め静岡研究会

— 幾何，複素解析，そして数理物理 —

2025年3月25日（火）～3月28日（金）

Evolutives and involutes of fronts

縮閉線と伸開線について

高橋 雅朋（室蘭工業大学）

第20回 沼津研究集会

2013年3月6日（水）～3月8日（金）

*記録によると沼津で初めて講演したのは

2005年「第13回 沼津研究集会」 沼津高専

題名 : Legendrian dualities and parallels of spacelike hypersurfaces
in pseudo-spheres

となっているので2004年の第12回から参加させてもらっていました。

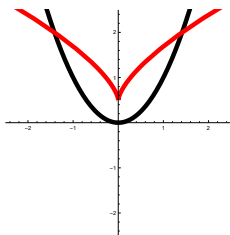
1. 正則曲線の縮閉線と伸開線とベルトラン曲線・・・R1, R2, R3
 2. 枠付き曲面・・・R4
 3. ベルトラン枠付き曲面・・・R5
 4. 枠付き曲面の焦面と伸開面・・・R5
- R1** T. Fukunaga, M. Takahashi, Evolutes and involutes of frontals in the Euclidean plane, Demonstr. Math. **48**, 2015, 147–166.
- R2** S. Honda, M. Takahashi, Bertrand and Mannheim curves of framed curves in the 3-dimensional Euclidean space, Turkish J. Math. **44**, 2020, 883–899.
- R3** N. Nakatsuyama and M. Takahashi, Bertrand types of regular curves and Bertrand framed curves in the Euclidean 3-space, To appear in Hokkaido Math. J. 2025.
- R4** T. Fukunaga, M. Takahashi, Framed surfaces in the Euclidean space, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **50**, 2019, 37–65.
- R5** N. Nakatsuyama, M. Takahashi, Bertrand framed surfaces in the Euclidean 3-space and its applications, in preparation, 2025.

1. 正則曲線の縮閉線と伸開線とベルトラン曲線

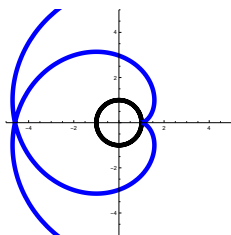
$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ を正則曲線 ($\dot{\gamma}(t) = (d\gamma/dt)(t) \neq 0, \forall t \in I, C^\infty$) に対して,
 t : 接ベクトル, n : 法ベクトル, κ : 曲率

定義 (正則曲線の縮閉線・伸開線)

- 正則曲線の縮閉線 $\iff Ev(\gamma) : I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} n(t), (\kappa(t) \neq 0).$
- 正則曲線の伸開線 $\iff Inv(\gamma, t_0) : I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \gamma(t) - \left(\int_{t_0}^t |\dot{\gamma}(t)| dt \right) t(t).$



放物線の縮閉線



円の伸開線

1. 正則曲線の縮閉線と伸開線とベルトラン曲線

命題（縮閉線と伸開線の関係）

- $Ev(Inv(\gamma, t_0))(t) = \gamma(t).$
- $Inv(Ev(\gamma), t_0)(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t_0)} \mathbf{n}(t), (\kappa(t) \neq 0).$

- この命題は特異点を除いて成立している [R1].
- 特異点や変曲点がある場合に対して、**縮閉線**と**伸開線**が条件の下で定義され、その対応も上記と同じく成り立っている（20回目の話）.
- ここでは曲面版を考えたい．正則曲面の**焦面（縮閉面）**の定義は古典的にあるが、**伸開面**の定義は？焦面に対して逆対応と言ってもいいが、一般に曲面の**焦面**は2つあるので、どう対応させるのか？また、特異点が現れるので、特異点をどう処理するのか？

手法：ベルトラン曲線の理論を用いる．通常は空間曲線に対してであるが、平面曲線に適用してみる．また、特異点を持つ曲面として、枠付き曲面の理論を用いる．

1. 正則曲線の縮閉線と伸開線とベルトラン曲線

$\gamma, \bar{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$: 非退化な正則空間曲線. $\{t, n, b\}, \{\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}\}$: 動標構.

定義 (ベルトラン曲線)

- $\gamma, \bar{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$: **ベルトラン曲線対**
 $\iff \bar{\gamma}(t) = \gamma(t) + \lambda(t)n(t)$ となるような滑らかな関数 $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ が存在し,
 $n(t) = \pm \bar{n}(t)$ である, $\forall t \in I$.
- $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$: **ベルトラン曲線**
 $\iff \gamma$ と $\bar{\gamma}$ がベルトラン曲線対である γ と異なる非退化な曲線 $\bar{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ が存在する.

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ を弧長パラメータ s をもつ非退化な曲線とする. κ : 曲率, τ : 捩率.

定理 (ベルトラン曲線 [R2], [R3])

- (1) $\tau(s_0) \neq 0$ となるような点 $s_0 \in I$ が存在するとする.
 $\forall s \in I$ で $A\kappa(s) + B\tau(s) = 1$ と $\tau(s)(B\kappa(s) - A\tau(s)) \neq 0$ を満たす定数 $A \neq 0$ と定数 B が存在するとき, γ はベルトラン曲線である.
- (2) $\forall s \in I$ で $\tau(s) = 0$ とする. このとき γ は常にベルトラン曲線である.

1. 正則曲線の縮閉線と伸開線とベルトラン曲線

$\gamma, \bar{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$: 正則平面曲線. $\{t, n\}, \{\bar{t}, \bar{n}\}$: 動標構.

定義 (ベルトラン型曲線)

- $\gamma, \bar{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$: **$(v, \bar{w})$ -曲線対**
 $\iff \bar{\gamma}(t) = \gamma(t) + \lambda(t)v(t)$ となるような滑らかな関数 $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ が存在し,
 $v(t) = \pm \bar{w}(t)$ である, $\forall t \in I$. ($v, w : n, t$ のいずれか)
- $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$: **$(v, \bar{w})$ -ベルトラン型曲線**
 $\iff \gamma$ と $\bar{\gamma}$ が $(v, \bar{w})$ -曲線対である γ と異なる非退化な曲線 $\bar{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ が存在する.

	n	t
$\bar{n}$	$\lambda \neq 0$: 定数	$\lambda(t) = -\int \dot{\gamma}(t) dt$
$\bar{t}$	$\lambda(t) = 1/\kappa(t)$	λ : 任意, $\kappa = 0$

	n	t
$\bar{n}$	平行曲線	伸開線
$\bar{t}$	縮閉線	直線の一部

$$\begin{aligned} \gamma : (n, \bar{n})\text{-ベルトラン型曲線} &\Rightarrow \exists \bar{\gamma} = \gamma + \lambda n, n = \pm \bar{n} \\ &\Rightarrow \dot{\bar{\gamma}} = \dot{\gamma} + \dot{\lambda} n + \lambda \dot{n} \Rightarrow \dot{\lambda} = 0 \Rightarrow \bar{\gamma} = \gamma + \lambda n. \end{aligned}$$

1. 正則曲線の縮閉線と伸開線とベルトラン曲線

$\gamma, \bar{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$: 非退化な正則空間曲線, 弧長パラメータ.

$\{t, n, b\}, \{\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}\}$: 動標構. [R3]

	t	n	b
$\bar{t}$	存在しない	$\tau = 0, \kappa' \neq 0, \lambda = 1/\kappa$	存在しない
$\bar{n}$	$\tau = 0$ $\lambda = -s + c \neq 0$	$\tau \neq 0, A\kappa + B\tau = 1$ $\tau(B\kappa - A\tau) \neq 0$	$\tau \neq 0$ $A\tau' = \kappa(A^2\tau^2 + 1)$
$\bar{b}$	存在しない	$A(\kappa^2 + \tau^2) = \kappa$ $\tau(\kappa\tau' - \kappa'\tau) \neq 0$	$\tau = 0$ λ : 定数

	t	n	b
$\bar{t}$	存在しない	平面縮閉線	存在しない
$\bar{n}$	平面伸開線	ベルトラン曲線	マンハイムパートナー曲線
$\bar{b}$	存在しない	マンハイム曲線	平行曲線

2. 枠付き曲面

全体を通してすべての写像と多様体は滑らか (C^∞ 級) であるとする.

$\mathbb{R}^3$: ユークリッド空間, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$: ベクトル

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$: 内積

- $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$: $\mathbf{a}$ のノルム

- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$: 外積

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$: $\mathbb{R}^3$ の標準基底

- $S^2 = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{a}| = 1\}$: 単位球面

- $\Delta = \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in S^2 \times S^2 \mid \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0\}$: 3次元の滑らかな多様体

定義 (枠付き曲面 [R4])

$(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$: 枠付き曲面 ($U : \mathbb{R}^2$ の単連結領域)

$$\iff \mathbf{x}_u(u, v) \cdot \mathbf{n}(u, v) = \mathbf{x}_v(u, v) \cdot \mathbf{n}(u, v) = 0, \forall (u, v) \in U.$$

R4 T. Fukunaga, M. Takahashi, Framed surfaces in the Euclidean space, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **50** 2019, 37–65.

2. 枠付き曲面

$(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ を枠付き曲面, $\mathbf{t}(u, v) = \mathbf{n}(u, v) \times \mathbf{s}(u, v)$ とする.

$\Rightarrow \{\mathbf{n}(u, v), \mathbf{s}(u, v), \mathbf{t}(u, v)\} : \mathbf{x}(u, v) \text{ の動標構}$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{n}_{u_i} \\ \mathbf{s}_{u_i} \\ \mathbf{t}_{u_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e_i & f_i \\ -e_i & 0 & g_i \\ -f_i & -g_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{s} \\ \mathbf{t} \end{pmatrix}$$

$a_i, b_i, e_i, f_i, g_i : U \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2$: 枠付き曲面の**基本不変量**

注意 : $a_i, b_i, e_i, f_i, g_i, i = 1, 2$ は枠付き曲面の合同における完全不変量である [R4].

定義 (枠付き曲面の曲率 [R4])

枠付き曲面の曲率 $C^F = (J^F, K^F, H^F) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $J^F = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$,
 $K^F = \det \begin{pmatrix} e_1 & f_1 \\ e_2 & f_2 \end{pmatrix}$, $H^F = -\frac{1}{2} \left\{ \det \begin{pmatrix} a_1 & f_1 \\ a_2 & f_2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} b_1 & e_1 \\ b_2 & e_2 \end{pmatrix} \right\}$.

3. ベルトラン枠付き曲面

(x, n, s) と $(\bar{x}, \bar{n}, \bar{s}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ を枠付き曲面. $\{n, s, t\}, \{\bar{n}, \bar{s}, \bar{t}\} : \text{動標構}$.

定義 (($v, \bar{w}$)-曲面对, ベルトラン枠付き曲面 [R5])

- $(x, n, s), (\bar{x}, \bar{n}, \bar{s}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta : (v, \bar{w})\text{-曲面对}$
 $\iff \bar{x}(u, v) = x(u, v) + \lambda(u, v)v(u, v)$ となるような滑らかな関数
 $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ が存在し, $v(u, v) = \bar{w}(u, v)$ である, $\forall (u, v) \in U$.
($v, w : n, s, t$ のいずれか)
 - $(x, n, s) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta : (v, \bar{w})\text{-ベルトラン枠付き曲面}$
 $\iff (x, n, s)$ と $(\bar{x}, \bar{n}, \bar{s})$ が $(v, \bar{w})\text{-曲面对}$ である枠付き曲面
 $(\bar{x}, \bar{n}, \bar{s}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ が存在する.
- $\lambda \neq 0 : \{(u, v) \in U \mid \lambda(u, v) \neq 0\} : U$ の稠密部分集合 $\Rightarrow x$ と $\bar{x}$ は異なる曲面.

R5 N. Nakatsuyama, M. Takahashi, Bertrand framed surfaces in the Euclidean 3-space and its applications, in preparation, 2025.

3. ベルトラン枠付き曲面

$(x, n, s), (\bar{x}, \bar{n}, \bar{s}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$: 枠付き曲面, $\{n, s, t\}, \{\bar{n}, \bar{s}, \bar{t}\}$: 動標構.

	n	s	t
$\bar{n}$	$\lambda \neq 0$: 定数	$\det(b, g) = 0,$ $\lambda = -(\int a_1 du + \int a_2 dv)$	$\det(a, g) = 0$ $\lambda = -(\int b_1 du + \int b_2 dv)$
$\bar{s}$	$\begin{pmatrix} a_1 + \lambda e_1 & b_1 + \lambda f_1 \\ a_2 + \lambda e_2 & b_2 + \lambda f_2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda e_1 & b_1 + \lambda g_1 \\ \lambda e_2 & b_2 + \lambda g_2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -\cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda f_1 & a_1 - \lambda g_1 \\ \lambda f_2 & a_2 - \lambda g_2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\bar{t}$	$(n, \bar{s})$ -ベルトラン枠付き曲面	$(s, \bar{s})$ -ベルトラン枠付き曲面	$(t, \bar{s})$ -ベルトラン枠付き曲面

	n	s	t
$\bar{n}$	平行曲面	伸開面	伸開面
$\bar{s}$	焦面	$(s, \bar{s})$ -ベルトラン枠付き曲面	$(t, \bar{s})$ -ベルトラン枠付き曲面
$\bar{t}$	焦面	$(s, \bar{t})$ -ベルトラン枠付き曲面	$(t, \bar{t})$ -ベルトラン枠付き曲面

- $(n, \bar{s})$ と $(n, \bar{t})$ -ベルトラン枠付き曲面が焦面に対応する.
- $(s, \bar{n})$ と $(t, \bar{n})$ -ベルトラン枠付き曲面が伸開面に対応する.
- $(n, \bar{s})$ と $(n, \bar{t})$, $(s, \bar{s})$ と $(s, \bar{t})$, $(t, \bar{s})$ と $(t, \bar{t})$ の条件はそれぞれ同値.

4. 焦面と伸開面

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ を枠付き曲面, $a_i, b_i, e_i, f_i, g_i, i = 1, 2$ を基本不変量とする.
 $\mathcal{F}(U, \mathbb{R}^3 \times \Delta) := \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}) \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3 \times \Delta) | (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}) : \text{枠付き曲面}\}$ とする.

定義 (枠付き曲面の焦面 [R5])

(1) 写像 $\boldsymbol{C}^s : \mathcal{F}(U, \mathbb{R}^3 \times \Delta) \rightarrow \mathcal{F}(U, \mathbb{R}^3 \times \Delta)$ を以下のように与える.

$$\boldsymbol{C}^s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}) = (\boldsymbol{x}^{n,s}, \boldsymbol{n}^{n,s}, \boldsymbol{s}^{n,s}),$$

$$\boldsymbol{x}^{n,s}(u, v) = \boldsymbol{x}(u, v) + \lambda^{n,s}(u, v)\boldsymbol{n}(u, v),$$

$$\boldsymbol{n}^{n,s}(u, v) = \sin \theta^{n,s}(u, v)\boldsymbol{s}(u, v) + \cos \theta^{n,s}(u, v)\boldsymbol{t}(u, v),$$

$$\boldsymbol{s}^{n,s}(u, v) = \boldsymbol{n}(u, v).$$

$\lambda^{n,s}, \theta^{n,s} : U \rightarrow \mathbb{R}$ は以下の式を満たすような滑らかな関数, $\forall (u, v) \in U$.

$$\begin{pmatrix} a_1 + \lambda^{n,s}e_1 & b_1 + \lambda^{n,s}f_1 \\ a_2 + \lambda^{n,s}e_2 & b_2 + \lambda^{n,s}f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta^{n,s} \\ \cos \theta^{n,s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

このとき, $\boldsymbol{x}^{n,s} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を枠付き曲面 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s})$ の焦面という.

(1) $\Rightarrow K^F \lambda^2 - 2H^F \lambda + J^F = 0$ が成り立つ. (正則曲面の場合は $\lambda = 1/\kappa$.)

4. 焦面と伸開面

(2) 写像 $C^t : \mathcal{F}(U, \mathbb{R}^3 \times \Delta) \rightarrow \mathcal{F}(U, \mathbb{R}^3 \times \Delta)$ を以下のように与える.

$$\begin{aligned} C^t(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) &= (\mathbf{x}^{n,t}, \mathbf{n}^{n,t}, \mathbf{s}^{n,t}), \\ \mathbf{x}^{n,t}(u, v) &= \mathbf{x}(u, v) + \lambda^{n,t}(u, v)\mathbf{n}(u, v), \\ \mathbf{n}^{n,t}(u, v) &= \cos \theta^{n,t}(u, v)\mathbf{s}(u, v) - \sin \theta^{n,t}(u, v)\mathbf{t}(u, v), \\ \mathbf{s}^{n,t}(u, v) &= \sin \theta^{n,t}(u, v)\mathbf{s}(u, v) + \cos \theta^{n,t}(u, v)\mathbf{t}(u, v). \end{aligned}$$

$\lambda^{n,t}, \theta^{n,t} : U \rightarrow \mathbb{R}$ は以下の式を満たすような滑らかな関数, $\forall (u, v) \in U$.

$$\begin{pmatrix} a_1 + \lambda^{n,t}e_1 & b_1 + \lambda^{n,t}f_1 \\ a_2 + \lambda^{n,t}e_2 & b_2 + \lambda^{n,t}f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos \theta^{n,t} \\ \sin \theta^{n,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

このとき, $\mathbf{x}^{n,t} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を枠付き曲面 $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})$ の**焦面**という.

※ C^s は $(\mathbf{n}, \bar{\mathbf{s}})$ -ベルトラン枠付き曲面, C^t は $(\mathbf{n}, \bar{\mathbf{t}})$ -ベルトラン枠付き曲面に対応する.

C^s, C^t の $\mathbf{x}^{n,s}, \mathbf{x}^{n,t}$ は同じ. 枠は枠反転で一致する.

4. 焦面と伸開面

定義 (枠付き曲面の伸開面 [R5])

- (1) $\det(\mathbf{b}(u, v), \mathbf{g}(u, v)) = 0, \forall (u, v) \in U$ かつ $(u_0, v_0) \in U$ とする.
写像 $\mathcal{I}^s : \mathcal{F}(U, \mathbb{R}^3 \times \Delta) \rightarrow \mathcal{F}(U, \mathbb{R}^3 \times \Delta)$ を以下のように与える.

$$\mathcal{I}^s(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) = (\mathbf{x}^{s,n}, \mathbf{n}^{s,n}, \mathbf{s}^{s,n}),$$

$$\mathbf{x}^{s,n}(u, v) = \mathbf{x}(u, v) + \lambda^{s,n}(u, v)\mathbf{s}(u, v),$$

$$\mathbf{n}^{s,n}(u, v) = \mathbf{s}(u, v),$$

$$\mathbf{s}^{s,n}(u, v) = \cos \theta^{s,n}(u, v)\mathbf{t}(u, v) - \sin \theta^{s,n}(u, v)\mathbf{n}(u, v).$$

$\theta^{s,n} : U \rightarrow \mathbb{R}$ を滑らかな関数, $\lambda^{s,n} : U \rightarrow \mathbb{R}$ は以下で与える.

$$\lambda^{s,n}(u, v) = - \left(\int_{u_0}^u a_1(u, v) du + \int_{v_0}^v a_2(u_0, v) dv \right).$$

このとき, $\mathbf{x}^{s,n} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $(u_0, v_0) \in U$ における枠付き曲面 $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})$ の $\mathbf{s}$ 方向の伸開面という.

4. 焦面と伸開面

- (2) $\det(\mathbf{a}(u, v), \mathbf{g}(u, v)) = 0, \forall (u, v) \in U$ かつ $(u_0, v_0) \in U$ とする.
写像 $\mathcal{I}^t : \mathcal{F}(U, \mathbb{R}^3 \times \Delta) \rightarrow \mathcal{F}(U, \mathbb{R}^3 \times \Delta)$ を以下のように与える.

$$\mathcal{I}^t(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) = (\mathbf{x}^{t,n}, \mathbf{n}^{t,n}, \mathbf{s}^{t,n}),$$

$$\mathbf{x}^{t,n}(u, v) = \mathbf{x}(u, v) + \lambda^{t,n}(u, v)\mathbf{t}(u, v),$$

$$\mathbf{n}^{t,n}(u, v) = \mathbf{t}(u, v),$$

$$\mathbf{s}^{t,n}(u, v) = \cos \theta^{t,n}(u, v)\mathbf{n}(u, v) - \sin \theta^{t,n}(u, v)\mathbf{s}(u, v).$$

$\theta^{t,n} : U \rightarrow \mathbb{R}$ を滑らかな関数, $\lambda^{t,n} : U \rightarrow \mathbb{R}$ は以下で与える.

$$\lambda^{t,n}(u, v) = - \left(\int_{u_0}^u b_1(u, v) du + \int_{v_0}^v b_2(u_0, v) dv \right).$$

このとき, $\mathbf{x}^{t,n} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $(u_0, v_0) \in U$ における枠付き曲面 $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})$ の $\mathbf{t}$ 方向の伸開面という.

※ $\mathcal{I}^s$ は $(\mathbf{s}, \bar{\mathbf{n}})$ -ベルトラン枠付き曲面, $\mathcal{I}^t$ は $(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{n}})$ -ベルトラン枠付き曲面に対応する.

4. 焦面と伸開面

焦面と伸開面が枠付き曲面の逆に対応する条件を考える。

定理 ([R5])

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ を枠付き曲面, $(u_0, v_0) \in U$ とする。

- (1) • $\det(\boldsymbol{b}(u, v), \boldsymbol{g}(u, v)) = 0, \forall (u, v) \in U$ とし, $\theta^{s,n} : U \rightarrow \mathbb{R}$ を滑らかな関数, $\lambda^{s,n} : U \rightarrow \mathbb{R}$ は以下のような滑らかな関数とする。

$$\lambda^{s,n}(u, v) = - \left(\int_{u_0}^u a_1(u, v) du + \int_{v_0}^v a_2(u_0, v) dv \right).$$

$\lambda^{n,s}, \theta^{n,s} : U \rightarrow \mathbb{R}$ を $\underline{\lambda^{n,s} = -\lambda^{s,n}, \theta^{n,s} = -\theta^{s,n}}$ ととると,

$$\mathcal{C}^s(\mathcal{I}^s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}).$$

- $\det(\boldsymbol{a}(u, v), \boldsymbol{g}(u, v)) = 0, \forall (u, v) \in U$ とし, $\theta^{t,n} : U \rightarrow \mathbb{R}$ を滑らかな関数, $\lambda^{t,n} : U \rightarrow \mathbb{R}$ は以下の滑らかな関数とする。

$$\lambda^{t,n}(u, v) = - \left(\int_{u_0}^u b_1(u, v) du + \int_{v_0}^v b_2(u_0, v) dv \right).$$

$\lambda^{n,t}, \theta^{n,t} : U \rightarrow \mathbb{R}$ を $\underline{\lambda^{n,t} = -\lambda^{t,n}, \theta^{n,t} = -\theta^{t,n}}$ ととると,

$$\mathcal{C}^t(\mathcal{I}^t(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}).$$

4. 焦面と伸開面

- (2) • $\lambda^{n,s}, \theta^{n,s} : U \rightarrow \mathbb{R}$ を条件式 (1) を満たすような滑らかな関数とする. $\theta^{s,n} : U \rightarrow \mathbb{R}$ を $\theta^{s,n} = -\theta^{n,s}$ ととると, 点 $(u_0, v_0) \in U$ において

$$\mathcal{I}^s(\mathcal{C}^s(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})) = (\mathbf{x} + \lambda^{n,s}(u_0, v_0)\mathbf{n}, \mathbf{n}, \mathbf{s}).$$

- $\lambda^{n,t}, \theta^{n,t} : U \rightarrow \mathbb{R}$ を条件式 (2) を満たすような滑らかな関数とする. $\theta^{t,n} : U \rightarrow \mathbb{R}$ を $\theta^{t,n} = -\theta^{n,t}$ ととると, 点 $(u_0, v_0) \in U$ において

$$\mathcal{I}^t(\mathcal{C}^t(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})) = (\mathbf{x} + \lambda^{n,t}(u_0, v_0)\mathbf{n}, \mathbf{n}, \mathbf{s}).$$

$$(1) \quad \begin{pmatrix} a_1 + \lambda^{n,s}e_1 & b_1 + \lambda^{n,s}f_1 \\ a_2 + \lambda^{n,s}e_2 & b_2 + \lambda^{n,s}f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta^{n,s} \\ \cos \theta^{n,s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} a_1 + \lambda^{n,t}e_1 & b_1 + \lambda^{n,t}f_1 \\ a_2 + \lambda^{n,t}e_2 & b_2 + \lambda^{n,t}f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos \theta^{n,t} \\ \sin \theta^{n,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. 焦面と伸開面

定理 ([R5])

$(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ を枠付き曲面, $(u_0, v_0) \in U$ とする.

- (1) $\det(\mathbf{b}(u, v), \mathbf{g}(u, v)) = 0, \forall (u, v) \in U$ とし, $\theta^{s,n} : U \rightarrow \mathbb{R}$ を滑らかな関数, $\lambda^{s,n} : U \rightarrow \mathbb{R}$ は以下の滑らかな関数とする.

$$\lambda^{s,n}(u, v) = - \left(\int_{u_0}^u a_1(u, v) du + \int_{v_0}^v a_2(u_0, v) dv \right).$$

写像 $\mathcal{I}^s$ の写像 $\mathcal{C}^s$ が存在するような $\lambda^{n,s} + \lambda^{s,n} \neq 0$ となる滑らかな関数 $\lambda^{n,s}, \theta^{n,s} : U \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する必要十分条件は, $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})$ は $(\mathbf{s}, \bar{\mathbf{s}})$ -ベルトラン枠付き曲面である. このとき $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})$ と $\mathcal{C}^s(\mathcal{I}^s(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}))$ は $(\mathbf{s}, \bar{\mathbf{s}})$ -曲面对である.

- (2) $\det(\mathbf{a}(u, v), \mathbf{g}(u, v)) = 0, \forall (u, v) \in U$ とし, $\theta^{t,n} : U \rightarrow \mathbb{R}$ を滑らかな関数, $\lambda^{t,n} : U \rightarrow \mathbb{R}$ は以下の滑らかな関数とする.

$$\lambda^{t,n}(u, v) = - \left(\int_{u_0}^u b_1(u, v) du + \int_{v_0}^v b_2(u_0, v) dv \right).$$

写像 $\mathcal{I}^t$ の写像 $\mathcal{C}^t$ が存在するような $\lambda^{n,t} + \lambda^{t,n} \neq 0$ となる滑らかな関数 $\lambda^{n,t}, \theta^{n,t} : U \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する必要十分条件は, $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})$ は $(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})$ -ベルトラン枠付き曲面である. このとき $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})$ と $\mathcal{C}^t(\mathcal{I}^t(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}))$ は $(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})$ -曲面对である.

4. 焦面と伸開面

	n	s	t
$\bar{n}$	平行曲面	伸開面	伸開面
$\bar{s}$	焦面	$(s, \bar{s})$ -ベルトラン枠付き曲面	$(t, \bar{s})$ -ベルトラン枠付き曲面
$\bar{t}$	焦面	$(s, \bar{t})$ -ベルトラン枠付き曲面	$(t, \bar{t})$ -ベルトラン枠付き曲面

$$\begin{array}{ccccc}
 & C^s & & C^s & \\
 (x^{s,n}, n^{s,n}, s^{s,n}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} & (x, n, s) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} & (x^{n,s}, n^{n,s}, s^{n,s}) \\
 & \mathcal{I}^s & & \mathcal{I}^s & \\
 & & & & \\
 C^s & \searrow & \downarrow & & (s, \bar{s}) \\
 & & (\bar{x}, \bar{n}, \bar{s}) & &
 \end{array}$$

※ $s \rightarrow t$ とすれば $C^t, \mathcal{I}^t, (t, \bar{t})$ で成り立つ.

4. 焦点と伸開面

具体例 (カスプ辺)

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ を以下のように与える.

$$\boldsymbol{x}(u, v) = \left(u, \frac{v^2}{2}, \frac{v^3}{3}\right), \quad \boldsymbol{n}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{v^2+1}}(0, -v, 1), \quad \boldsymbol{s}(u, v) = (1, 0, 0).$$

このとき, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s})$ は枠付き曲面であり, 基本不変量は

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v\sqrt{v^2+1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e_1 & f_1 & g_1 \\ e_2 & f_2 & g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/(v^2+1) & 0 \end{pmatrix}.$$

となることから, 枠付き曲面 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s})$ の曲率 C^F は以下ようになる.

$$J^F(u, v) = v\sqrt{v^2+1}, \quad K^F(u, v) = 0, \quad H^F(u, v) = \frac{1}{2(v^2+1)}.$$

4. 焦面と伸開面

焦面

- $\lambda^{n,s}(u, v) = v(v^2 + 1)^{3/2}$, $\theta^{n,s}(u, v) = 0$ ととると, 条件式 (1) を満たす.

$$\Rightarrow \mathcal{C}^s(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) = (\mathbf{x}^{n,s}, \mathbf{n}^{n,s}, \mathbf{s}^{n,s}),$$

$$\mathbf{x}^{n,s}(u, v) = \left(u, -v^4 - \frac{v^2}{2}, \frac{4}{3}v^3 + v \right),$$

$$\mathbf{n}^{n,s}(u, v) = \mathbf{t}(u, v), \quad \mathbf{s}^{n,s}(u, v) = \mathbf{n}(u, v).$$

- $\lambda^{n,t}(u, v) = v(v^2 + 1)^{3/2}$, $\theta^{n,t}(u, v) = -\pi/2$ ととると, 条件式 (2) を満たす.

$$\Rightarrow \mathcal{C}^t(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) = (\mathbf{x}^{n,t}, \mathbf{n}^{n,t}, \mathbf{s}^{n,t}),$$

$$\mathbf{x}^{n,t}(u, v) = \left(u, -v^4 - \frac{v^2}{2}, \frac{4}{3}v^3 + v \right),$$

$$\mathbf{n}^{n,t}(u, v) = \mathbf{t}(u, v), \quad \mathbf{s}^{n,t}(u, v) = -\mathbf{s}(u, v).$$

4. 焦面と伸開面

伸開面

- $\det(\mathbf{b}(u, v), \mathbf{g}(u, v)) = 0, \forall (u, v) \in U$ より, $\lambda^{s,n}(u, v) = -u$ と $\theta^{s,n}(u, v) = -\pi/2$, $(u_0, v_0) = (0, 0)$ ととる.

$$\Rightarrow \mathcal{I}^s(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) = (\mathbf{x}^{s,n}, \mathbf{n}^{s,n}, \mathbf{s}^{s,n}),$$

$$\mathbf{x}^{s,n}(u, v) = \left(0, \frac{v^2}{2}, \frac{v^3}{3}\right),$$

$$\mathbf{n}^{s,n}(u, v) = \mathbf{s}(u, v), \quad \mathbf{s}^{s,n}(u, v) = \mathbf{n}(u, v).$$

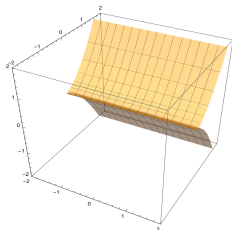
- $\det(\mathbf{a}(u, v), \mathbf{g}(u, v)) = 0, \forall (u, v) \in U$ より, $\lambda^{t,n}(u, v) = -\frac{1}{3}((v^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 1)$ と $\theta^{t,n}(u, v) = 0, (u_0, v_0) = (0, 0)$ ととる.

$$\Rightarrow \mathcal{I}^t(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) = (\mathbf{x}^{t,n}, \mathbf{n}^{t,n}, \mathbf{s}^{t,n}),$$

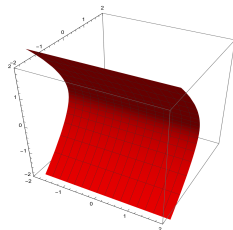
$$\mathbf{x}^{t,n}(u, v) = \left(u, \frac{v^2 - 2}{6} + \frac{1}{3\sqrt{v^2 + 1}}, -\frac{v}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{v^2 + 1}}\right)\right),$$

$$\mathbf{n}^{t,n}(u, v) = \mathbf{t}(u, v), \quad \mathbf{s}^{t,n}(u, v) = \mathbf{n}(u, v).$$

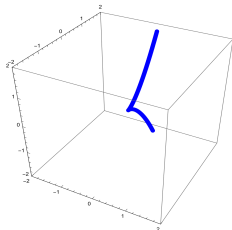
4. 焦面と伸開面



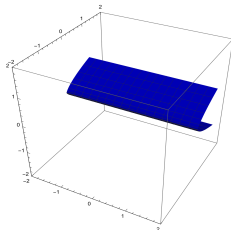
カस्प邊



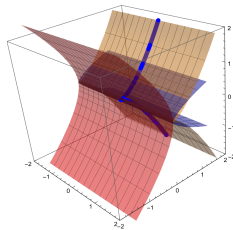
縮閉面



伸開面



伸開面



全て

4. 焦面と伸開面

具体例 (カスプ辺)

$(x, n, s) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ を以下のように与える.

$$x(u, v) = \left(v \cos u - \sqrt{1+v^2} \cos u, v \sin u + \sqrt{1+v^2} \sin u, u - v\sqrt{1+v^2} \right),$$

$$n(u, v) = \left(\cos u - \frac{v}{\sqrt{1+v^2}} \sin u, \sin u + \frac{v}{\sqrt{1+v^2}} \cos u, \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \right),$$

$$s(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} (-\sin u, \cos u, -v).$$

このとき, (x, n, s) は枠付き曲面であり, 基本不変量は

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{1+v^2} \\ 2v & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e_1 & f_1 & g_1 \\ e_2 & f_2 & g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{1+v^2}} & \frac{2v}{\sqrt{1+v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \\ \frac{1}{1+v^2} & 0 & -\frac{1}{1+v^2} \end{pmatrix}.$$

となることから, 枠付き曲面 (x, n, s) の曲率 C^F は以下ようになる.

$$J^F(u, v) = 4v\sqrt{1+v^2}, \quad K^F(u, v) = -\frac{2v}{(1+v^2)^{3/2}}, \quad H^F(u, v) = \frac{2v^2}{\sqrt{1+v^2}}.$$

4. 焦面と伸開面

$(s, \bar{s})$ -ベルトラン曲面

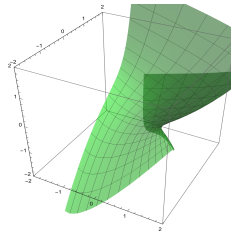
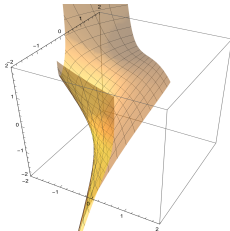
$\lambda^{s,s}(u, v) = -2(1 + v^2)$, $\theta^{s,s}(u, v) = \pi/2$ とすると, 条件

$$\begin{pmatrix} \lambda^{s,s} e_1 & b_1 + \lambda^{s,s} g_1 \\ \lambda^{s,s} e_2 & b_2 + \lambda^{s,s} g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos \theta^{s,s} \\ \sin \theta^{s,s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たすので, (x, n, s) と $(x^{s,s}, n^{s,s}, s^{s,s})$ は $(s, \bar{s})$ -曲面对である. ここで,

$$x^{s,s}(u, v) = \left(v \cos u + \sqrt{1 + v^2} \cos u, v \sin u - \sqrt{1 + v^2} \sin u, u + v \sqrt{1 + v^2} \right),$$

$$n^{s,s}(u, v) = t(u, v), \quad s^{s,s}(u, v) = s(u, v).$$



4. 焦面と伸開面

伸開面

$\det(\mathbf{b}(u, v), \mathbf{g}(u, v)) = 0, \forall (u, v) \in U$ より, $\lambda^{s,n}(u, v) = -1 - v^2$,
 $\theta^{s,n}(u, v) = \pi/4, (u_0, v_0) = (0, 0)$ ととる.

$$\Rightarrow \mathcal{I}^s(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) = (\mathbf{x}^{s,n}, \mathbf{n}^{s,n}, \mathbf{s}^{s,n}),$$

$$\mathbf{x}^{s,n}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u),$$

$$\mathbf{n}^{s,n}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} (-\sin u, \cos u, -v),$$

$$\mathbf{s}^{s,n}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} (-v \sin u, v \cos u, 1).$$

● $\lambda^{n,s}(u, v) = 1 + v^2, \theta^{n,s}(u, v) = -\pi/4$ とすると条件

$$\lambda^{n,s} = -\lambda^{s,n}, \theta^{n,s} = -\theta^{s,n}$$

を満たすので, $\mathcal{C}^s(\mathcal{I}^s(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})) = (\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})$.

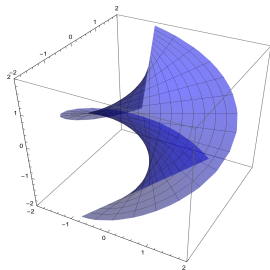
4. 焦面と伸開面

焦面

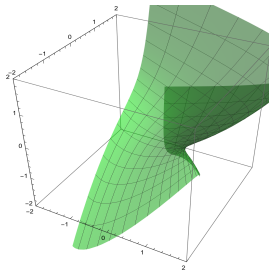
● $\lambda^{n,s}(u,v) = -1 - v^2$, $\theta^{n,s}(u,v) = \pi/4$ とすると条件を満たすので,

$$\mathcal{C}^s(\mathcal{I}^s(x,n,s)) = (x^{s,s}, n^{s,s}, s^{s,s}).$$

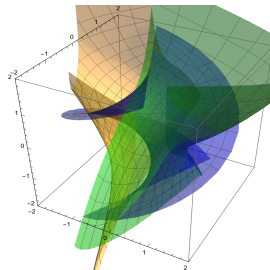
つまり, (x,n,s) と $\mathcal{C}^s(\mathcal{I}^s(x,n,s))$ は $(s,\bar{s})$ -曲面对である.



伸開面



$(s,\bar{s})$



全て

まとめ

- ベルトラン枠付き曲面を用いることで、枠付き曲面に対して**焦面**と**伸開面**を定義しました。
- **焦面**と**伸開面**の逆対応と焦面が2つある場合の関係を与えました。

今後の問題

- **焦面**は単位法ベクトル n のみで決まり $\{s, t\}$ に依存しないが、**伸開面**は $\{s, t\}$ に依存している。今回は s, t 方向の**伸開面**であるが、一般の方向に対する**伸開面**もあるはずである。
- 元の曲面の特異点の情報と**焦面**と**伸開面**の特異点の情報の関係を調べたい。
- 単位法ベクトル n がない場合にも（一般枠付き曲面に対して）**焦面**と**伸開面**を定義したい。

ご清聴ありがとうございました。