長い $\mathbb{C}^n$ の短い話——A SHORT HISTORY OF LONG $\mathbb{C}^n$'S

大沢健夫

1. はじめに

昨年は岡の上空移行原理についてということで、加法的な Cousin 問題との関連で正則関数の拡張問題について論じ、岡の第一論文が解析的連接層を係数とするコホモロジー群の長完全列へとつながったという話をした[1]。これはほぼ 1936 年から 1953 年頃までの展開だったが、Eilenberg と Steenrod によって書き下された長完全列 (1945) の原型となった Mayer-Vietoris 列も、1930 年ごろに発見されていたことを補足しておきたい。

今回は乗法的 Cousin 問題と関連する「岡の原理」について何か適当な話題はないかと探したところ、最近の展開が著しい「岡多様体」というトピックの中に、その好例ではあるがまだネット検索が難しい「長い $\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}$(たち)」についての結果がいくつか見つかった。そこで、長い $\mathbb{C}^n$ の個々の構造についてはまだ詳しくわかってはいないが、これらが岡多様体であることの証明を辿れば、岡の原理すなわち Stein 多様体からの正則写像がみたすホモトピー原理について、最近の結果にふれながら解説することが可能であろうと考えた。ホモトピー原理としてはここでは主に写像の拡張問題や近似問題に話を限るが、岡の原理の成立が写像の定義域の Stein 性のほかにターゲットのどんな性質に基づくものであるかをこの例に即して述べてみたい。

2. 長い $\mathbb{C}^n$ の定義とその周辺

まず定義だが、

定義 1. $\mathbb{C}^n$ と双正則同値な部分領域による単調増大な近似列[2]を持つ複素多様体を (一つの) 長い $\mathbb{C}^n$ と言う。

一般の複素多様体に対しても同様に、例えば長い開球などが定義される。

X が長い M であり $M \not\cong M$ ならば明らかに $X \not\cong X$ である。

長い M 全体 (文脈によっては双正則同値類全体の集合) を $\mathcal{L}_M$ で表す。$X \in \mathcal{L}_M$ のとき、M と同型な複素多様体から成る上のような近似列

[1] cf. [Oh-1].

[2] $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \subset \cup\Omega_j = \Omega$ であるとき、$\{\Omega_j\}$ は Ω の近似列であると言う。

(の一つ) を単に $[M]_j$ $(j=1,2,\dots)$ で表し、便宜上 $\lim_{j\to\infty}[M]_j = X$ と書く。このとき

$$K \Subset X \Rightarrow \exists j \; s.t. \; K \subset [M]_j \tag{1}$$

であることはコンパクト集合の定義から容易に従う。

$\mathscr{O}(M) := \{M$ 上の正則関数$\}$ と置く。$\mathscr{O}(M) \neq \mathbb{C}$ でも $\mathscr{O}(X) = \mathbb{C}$ となりうることは、2016 年に Boc Thaler と Forstnerič の論文 [BT-F] で初めて示された[3]。ここまでなら「長い $\mathbb{C}^n$ の短すぎる話」だが、以下ではその背景を含むやや詳しい話を補った後、「長い $\mathbb{C}^n$ は岡である」という本題へと進みたい。

3. 力学系や和集合問題との関連

開 Riemann 面が Stein であることと Liouville の定理を合わせれば、$\mathcal{L}_{\mathbb{C}} = \{\mathbb{C}\}$ であることは明らかである。$n \geq 2$ のとき長い $\mathbb{C}^n$ が $\mathbb{C}^n$ にいつ同型になるかは複素力学系の不動点を通る安定多様体の構造とも絡む問題である[4]。$\mathbb{C}^n$ 内には Fatou-Bieberbach 領域 (=FBD) という、$\mathbb{C}^n$ と同型だが境界点を持つ領域が存在する。FBD の増大列から様々な長い $\mathbb{C}^n$ が生ずる。Wold は [W-2] で FBD の中に多項式凸でないものが存在することを示し、これを用いて [W-2] で正則凸でない長い $\mathbb{C}^n$ の例を構成した。FBD は $\mathbb{C}^n$ の自己同型の反復合成による離散力学系の被吸引初期値集合 (basin of attraction) として現れ、多変数の複素力学系において重要な研究対象である[5]。また、FBD は小平流の Nevanlinna 理論にも用いられ、代数幾何との関連性もある (cf. [K])[6]。ちなみに FBD を用いると、近似列として非可算無限列を許して「超長い $\mathbb{C}^n$」という可算基を持たない複素多様体を定義することが可能である。しかしここでは複素多様体として連結成分が可算基を持つものだけを考える[7]。

長い $\mathbb{C}^n$ は和集合問題 (union problem=UP) に関連しても現れる。UP とは、Ω の近似列 $\{\Omega_j\}$ において各 Ω_j が Stein ならば Ω もそうかというもので、Behnke と Thullen の論文 [B-T] により 1933 年に $\Omega_j \subset \mathbb{C}^n$ のときに問題とされ、Ω が特別な形の領域に限って [B-T] で、一般の Ω に対しては Behnke-Stein[B-S] で肯定的に解決された。

Fornaess は [F-1] で、UP の複素多様体への一般化にあたる問題を次の形で否定的に解決した。

---

[3] $\mathcal{L}_{\mathbb{C}^2} \neq \{\mathbb{C}^2\}$ であることは [W-3] による.

[4] これについて Bedford が 2000 年に提出した問題が Bera と Verma によって最近解決された (cf. [J-V], [B-V]).

[5] cf. [U-T-M].

[6] 上田哲生氏によれば、長い $\mathbb{C}^n$ が Stein 多様体かどうかは [K] で初めて問題にされた.

[7] 「超長い $\mathbb{B}^n$」というものは $n \geq 2$ でもありそうにないが、(Alexandroff 直線 (=long line))[4] に複素構造を入れて「超長い $\mathbb{C}^2$」が作れるかどうかは非自明で、検証に値することかもしれない.

定理 1. $n \geq 3 \Rightarrow \exists X \in \mathcal{L}_{\mathbb{B}^n}$ *s.t.* $X \notin \mathscr{O}cvx$.

ただし $\mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n; \|z\| < 1\}$, $\mathscr{O}\mathrm{cvx} =\{$ 正則凸多様体 [8]$\}$ とおく。つまり $n \geq 3$ ならば長い $\mathbb{B}^n$ は Stein であるとは限らない。[Wm] をふまえたこの例の構成法は [W-2,3] を含む後の展開に決定的な影響を与えた。

[F-1 ∼ 4] では UP は Levi 問題の一般化として位置づけられた。その最も簡単な場合が $\Omega_j \cong \mathbb{C}^n$ や $\Omega_j \cong \mathbb{B}^n$ のときである。[F-4] では [F-1] より詳しく次が示されている。

定理 2. $n \geq 2$ のとき、$\mathbb{C}^n$ の多項式自己同型の列 F_μ $(\mu = 1, 2, \dots)$ で $\Omega := \{z \in \mathbb{C}^n; \lim_{\mu\to\infty} F_\mu(z) = 0\}$ が次の性質 *i)* ∼ *iii)* をもつものが存在する。

i) $\Omega \in \mathcal{L}_{\mathbb{B}^n}$.

ii) Ω の小林擬計量 $\equiv 0$.

iii) 非定数多重劣調和関数 $\psi : \mathbb{C}^n \to [0, \infty)$ が存在して $\Omega = \{\psi < 0\}$.

よってとくに $n \geq 2$ のとき $\mathcal{L}_{\mathbb{B}^n} \setminus \{\mathbb{B}^n, \mathbb{C}^n\} \neq \emptyset$ である。定理 2 における長い $\mathbb{B}^n$ を Fornaess は「短い $\mathbb{C}^n$」と呼んだ。

この時点では長い $\mathbb{C}^2$ が Stein かどうかさえ未解決であったが、2005 年に Wold[W-1] は次を示した。

定理 3. $X = \lim_{j\to\infty} [\mathbb{C}^n]_j$ のとき、$([\mathbb{C}^n]_j, [\mathbb{C}^n]_{j+1})$ がすべて *Runge* 対であれば $X \cong \mathbb{C}^n$ である。

[W-3] の例の構成においては $\mathbb{C}^2$ から $\mathbb{C}^2$ への単射正則写像がコンパクト集合の Runge 性[9]を保つとは限らないことがポイントだが、作り方からこのような長い $\mathbb{C}^n$ は通常の $\mathbb{C}^n$ の変形として得られることが予想された (L. Meersseman)。Forstnerič [Fn-2] はそれに答える形で次を示した。

定理 4. $n > 1$ とし、*Stein* 多様体 S 内に高々可算個の解析的閉部分集合 A_j と $S \setminus \cup A_j$ 内の可算個の点からなる集合 B を与えたとき、複素多様体 X と臨界点を持たない正則写像 $\pi : X \to S$ で次の (i) ∼ (iii) を満たすものが存在する。

(i) ファイバー $X_s := \pi^{-1}(s)$ はすべて長い $\mathbb{C}^n$ である。

(ii) $s \in A \Rightarrow X_s \cong \mathbb{C}^n$.

(iii) $s \in B$ なら X_s は *Stein* ではない。

[BT-F] では [W-3] と同様だがやや改良された構成で次が示されている。

[8]複素多様体 M が正則凸: $\iff \forall \gamma_0 \in M^{\mathbb{N}}_{div} := \{\gamma \in M^{\mathbb{N}}; \gamma(\mathbb{N}) \not\Subset M\} \exists f \in \mathscr{O}(M)$ s.t. $f(\gamma_0(\mathbb{N})) \not\Subset \mathbb{C}$.

[9]正則関数の整関数による近似可能性

定理 5. $n \geq 2 \Rightarrow \exists X \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}^n}$ *s.t.* $PSH(X)^{10} = [-\infty, \infty)$ (よって特に $\mathscr{O}(X) = \mathbb{C}$).

これに続く定理では、$n > 1$ なら $\mathcal{L}_{\mathbb{C}^n}$ が非可算無限濃度を持つことや、長い $\mathbb{C}^n$ の自己同型に関する結果が Chern-Moser 不変量と関連させて述べてあるが、ここではこれ以上深入りしない。

4. 岡の原理と岡多様体

さて岡の原理についてだが、この言葉は Serre が岡の第 3 論文 [O] のアイディアを一言でまとめたものである。[O] の結果は $\mathbb{C}^n$ 内の正則領域 D についてのもので、端的には $H^1(D, \mathscr{O}^*) \hookrightarrow H^2(D, \mathbb{Z})$[11] ということだが、Grauert と Remmert の名著 [G-H] では次のように丁寧に述べられている[12]。

定理 X を被約な複素解析空間とし、ある $q \geq 1$ に対して $H^q(X, \mathscr{O}) = H^{q+1}(X, \mathscr{O}) = 0$ である (例えば X は Stein 空間) とする。このとき入射準同型 $\mathscr{O}^* \to \mathscr{C}^*$ は同型 $H^q(X, \mathscr{O}^*) \cong H^q(X, \mathscr{C}^*)$ を誘導する[13]。

これは次のようにややあいまいな形で述べられる重要な岡の原理の原初的な形である。

岡の原理 被約な Stein 空間 X 上で、コホモロジーで定式化しうる解析的な命題の真偽は、対応する位相的な命題の真偽のみによる。すなわち問題の解析的な可解性と連続的な可解性は同値である。

岡の有名な定理はこの原理を裏打ちしている。

岡の定理 ([O], 1939). 被約な Stein 空間 X 上の Cousin II 分布 $\{U_i, h_i\}$ が正則解を持つための必要十分条件は連続解を持つことである。

[G-R] が出版された時点ですでに岡の原理をふまえた結果は多く、[G-R] でもそれについては [Ft] とその文献表を見よと書いてある。ところが岡の原理を正則写像の近似定理や拡張定理に当てはめようとすると、写像の行き先によって成り立つときとそうでないときがある。早い話が、$\mathbb{C}$ から $\mathbb{D} := \mathbb{B}^1$ への同相写像は存在するが、正則同型はない。したがって正則写像に関しては、岡の原理が成立するためには行き先の多様体に多少の広さがなければならない。いわばその「ゆとり」として Gromov[Gm-1,2] が導入したのが多様体の楕円性であった。その顕著な

---

[10] $PSH(X)$ で X 上の多重劣調和関数の集合を表す.

[11] $\mathscr{O}^*$ で乗法的に可逆な正則関数の芽の層を表す.

[12] 以下の「定理 6」から「岡の定理」までは [G-R, p.145] による.

[13] $\mathscr{C}^*$ は乗法的に可逆な複素数値連続関数の芽の層.

応用例として、Eliashberg と Gromov [E-G] および Schürmann [S] による Forster 予想の解決[14]がある。Forstnerič[Fn-1] はこれらをふまえ、より端的な形で岡多様体を導入した。

定義 2. *(CAP と CIP)*
CAP^{15} $:\iff$ $\forall m \in \mathbb{N},\ \forall K \Subset K \underset{convex}{\subset} \mathbb{C}^m\ \&\ \forall f : K \underset{holom}{\to} X$, $\exists f_\mu : \mathbb{C}^m \underset{holom}{\to} X\ (\mu = 1, 2, \dots)\ s.t.\ f_\mu|_K \underset{uniformly}{\to} f\ (\mu \to \infty)$.

CIP^{16} $:\iff$ $\forall m \in \mathbb{N}, \forall contractible\ \ T = \overline{T} \underset{analytic}{\subset} \mathbb{C}^m, \forall f : T \underset{holom}{\to} X, \exists \tilde{f} : T \underset{holom}{\to} X\ s.t.\ \tilde{f}|_T = f$.

定理 6. $CAP \iff CIP \quad (\forall X)$.

$\Leftarrow$ は容易だが $\Rightarrow$ は難しい。

定義 3. *CAP* または *CIP* をみたす X を岡多様体と言う[17]。

Stein 多様体 S から岡多様体 X への連続写像は正則写像へと連続的に変形でき、それは様々な付加条件付きで可能である。例えば f がある複素部分多様体上で既に正則であれば、そこでの値は動かさずに変形可能であるし、与えられたコンパクトな正則凸部分集合上で f が正則であれば、そこでの値を任意幅で近似しつつ変形することが可能である。また

$$\mathscr{O}(S, X) := \{f; f \underset{holom}{\to} X\}$$

および

$$\mathscr{C}(S, X) : \{f; f \underset{cont}{\to} X\}$$

の間の自然な入射は弱ホモトピー同値[18]になる。

コンパクトな複素多様体の岡性は変形不変ではないことが知られている (cf. [L-2])。

K を $\mathbb{C}^n$ 内のコンパクトな多項式凸集合とするとき、日下部 [Kb] は $\mathbb{C}^n \backslash K$ に含まれる FBD のある種の正則族を構成することにより、$\mathbb{C}^n \backslash K$ が岡であることを示した。

[14] すべての n 次元 Stein 多様体が $\mathbb{C}^{N(n)}$ 次元の閉部分多様体として正則に埋め込めるような最小の $N(n)$ は $n + \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ である．ただし $n = 1$ の時は未解決.

[15] CAP=convex approximastion property.

[16] CIP は文字通りなら contractible interpolation property だが、実際には凸集合に限っても十分 (Lárusson) なため convex interpolation property と呼ばれる.

[17] CAP と CIP の他に「岡性」と呼ばれる互いに同値な条件が数多く存在する (cf. [Fn-3]).

[18] $:\iff$ すべてのホモトピー群どうしの同型を誘導する.

ちなみに、Gromov は複素解析の外にまで拡張された岡原理を "h-principle" と呼んだ。この考え方で、最近極小曲面論においても興味深い結果が得られているようである[19]。

5. 長い $\mathbb{C}^n$ の岡性と未解決問題

長い $\mathbb{C}^n$ が岡多様体であることは、$\mathbb{C}^n$ が CAP を満たすという明らかな事実と、M が CAP を満たせば (1) より $\lim_{j\to\infty}[M]_j$ もそうであることから従う。

長い $\mathbb{C}^n$ に関する未解決問題は、[Fn-3, pp. 201-202] によれば次の通りである[20]。

(a) $\exists X \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}^n}$ $s.t.$ $\mathscr{O}(X) \neq \mathbb{C}$ & $X \notin \mathscr{O}\mathrm{cvx}$?

(b) $\mathrm{Spec}\mathscr{O}(X)$[21] $=?$

(c) $\exists X \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}^n} \setminus \{\mathbb{C}^n\}$ s.t. $X \in \mathscr{O}\mathrm{cvx}$?

(d) $\exists X \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}^n}$ s.t. $\mathscr{M}(X) = \mathbb{C}$?[22]

(e) $X \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}^n} \setminus \{\mathbb{C}^n\} \Rightarrow Pic(X) \neq \{0\}$?

(f) $\exists X \to \mathbb{D}$ s.t. $\forall X_s \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}^2}$ & $X_s \not\cong X_{s'}$ if $s \neq s'$?

6. 長い Stein 多様体の超短い話

Stein 多様体の増大列 $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \ldots$ の極限 $\cup\Omega_j$ は、(Ω_j, Ω_{j+1}) がすべて Runge 対ならば Stein であるが、増大列が Runge 対からならないような極限として、注目に値する多様体が生ずるときがある。$\Omega_j \cong \mathbb{B}^n$ $(n \geq 3)$ のときの例が [F-1,4] だったわけだが、[F-2] では $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ の $\left\{\left(0, \dfrac{1}{k}\right); k = 1, 2, \ldots\right\}$ でのブローアップを用いて UP に 2 次元の反例を与え[23]、[F-3] ではこれに似た構成法により、擬凸な 2 次元 Hartogs 領域の増大列に改変操作と手術を施して、極限として $\mathbb{C}^2$ 上の局所擬凸な分岐 Riemann 領域で正則凸でないものが作られている[24]。

---

[19]cf. [Fn-4]

[20]記述を簡単にするため少し変えてある.

[21]位相環 $\mathscr{R}$ の極大閉イデアルの集合を $\mathrm{Spec}\mathscr{R}$ と書く.

[22]$\mathscr{M}(X)$:=$\{X$ 上の有理型関数 $\}$

[23]これと同じ例を上田哲生氏は修士論文で与えた (cf. [U, Théorème 2]).

[24]これは [G] の 1 ページ目の脚注で岡が肯定的に解決したと伝えられた主張に対する反例であり、学界に衝撃を与えた.

長い $\mathbb{C}^n$ や岡多様体が詳しく分かりつつある現状に鑑みれば、このような「長い Stein 多様体」に話を拡げる事は完全に無益なことではないだろう。その例を一つ上げて[25]「長い $\mathbb{C}^n$ の短い話」は一段落とさせていただきたい。

定理 7. (cf. [Oh-2]) $\exists\gamma \in (\mathbb{C}\setminus\{0\})^{\mathbb{N}}_{div}$ *and* $\exists\varphi \in PSH(\{|z|<1\})$ *s.t.* $\varphi^{-1}(-\infty) = \gamma(\mathbb{N})$ *and* $\exists M \notin \mathscr{O}\mathrm{cvx}$ *with*
$p : M \underset{proper}{\to} \mathbb{C}^2\setminus\{0\}$ *s.t.*

$$\mathscr{O}\mathrm{cvx} \not\ni \overline{p^{-1}\{|z|<1, e^{\varphi(z)}<|w|<e\}}^{\circ} \underset{loc.\psi cvx}{\hookrightarrow} \mathbb{C}^3.$$

References

[B-S] Behnke, H. and Stein, K., *Konvergente Folgen von Regularitäitsbereichen und die Meromorphiekonvexität,* Math. Ann. **116**, (1938–39), 204-216.

[B-T] Behnke, H., Thullen, P., *Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veräinderlichen,* Math. Ann. **108** (1933), 91-104 .

[B-V] Bera, S. and Verma, K., *Uniform non-autonomous basins of attraction,* **238** (2024), 995–1040.

[BT-F] Boc Thaler, L. and Forstnerič, F., *A long $\mathbb{C}^n$ without holomorphic functions,* Anal. PDE **9** (8) (2016), 2031-2050.

[E-G] Eliashberg, Y. and Gromov, M., *Embeddings of Stein manifolds of dimension n into the affine space of dimension 3n/2+1,* Ann. of Math. (2) **136** (1992), no. 1, 123-135.

[F-1] Fornaess, J. E., *An increasing sequence of Stein manifolds whose limit is not Stein,* Math. Ann. 223 (1976), 275–277.

[F-2] ——, *2 dimensional counterexamples to generalizations of the Levi problem,* ——, Math. Ann. **230** (1977), no. 2, 169-173.

[F-3] ——, *A counterexample for the Levi problem for branched Riemann domains over $\mathbb{C}^n$,* Math. Ann. **234** (1978), 275-277.

[F-4] ——, *Short* $\mathbb{C}^k$, in Complex Analysis in Several Variables, Adv. Stud. Pure Math. 42, pp. 95–108, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2004.

[Ft] Forster, O., *Topologische Methoden in der Theorie Steinscher Räume,* Act. Congr. Int. Math. 1970, Bd. 2, 613-618.

[Fn-1] Forstnerič, F., *Oka manifolds,* C.R. Math. Acad. Sci. Paris **347** (2009), 1017-1020.

[Fn-2] ——, *Holomorphic families of long $\mathbb{C}^2$'s,* Proc. Amer. Math. Soc. **140** (2012), no. 7, 2383-2389.

[Fn-3] ——, *Stein manifolds and holomorphic mappings,* Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), 56[Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics] Springer, Cham, 2017, xiv+562 pp.

[Fn-4] ——, *From Stein manifolds to Oka manifolds: the h-principle in complex analysis,* arXiv:2509.21197v1 [math.CV] 25 Sep 2025.

[25]以下は 1977 年の代数幾何の研究集会で漏れ聞いた問題の答えであるが、[Sr] で提出された「Stein 空間の増大列 $\{X_i\}$ において $X = \cup X_i \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathscr{O}(X))$ なら X は Stein か」に対する否定的解答でもある.

[Fn-L] Forstnerič and Lárusson, F., *Holomorphic flexibility properties of compact complex surfaces,* Int. Math. Res. Not. IMRN **2014** 3714-3734.

[G] Grauert, H., *On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds,* Ann. Math. 68 (1958), 460-472.

[G-R] Grauert, H. and Remmert, R., *Theorie der Steinschen Räume,* Springer 1977. シュタイン空間論　宮嶋公夫 [訳] シュプリンガー数学クラシックス　第 20 巻,　シュプリンガージャパン株式会社　2009.

[Gm-1] Gromov, M., *Partial differential relations,* volume 9 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[Gm-2] ——, *Oka's principle for holomorphic sections of elliptic bundles.* J. Amer. Math. Soc., 2(4) (1989), 851–897.

[J-V] Jonsson, M. and Varolin, D., *Stable manifolds of holomorphic diffeomorphisms,* Invent. Math. **149**, (2002), 409–430.

[K] 小平邦彦　Nevanlinna 理論　(酒井文雄記)　東大数学教室　セミナリーノート, 34. 1974.

[Kb] Kusakabe, Y., *Oka properties of complements of holomorphically convex sets,* Ann. of Math. (2) **199**(2) (2024), 899-917.

[L-1] Lárusson, F., *What is an Oka manifold?* Notices of AMS 57 (2010), 50-52.

[L-2] ——, *Deformations of Oka manifolds,* Math. Z. **272** (2012), 1051-1058.

[Oh-1] 大沢健夫　上空移行の原理とその周辺 https://www.math.sci.hokudai.ac.jp/ ishikawa/Numazu-Shizuoka/

[Oh-2] Ohsawa,T., *Constructing a holomorphically nonconvex surface which is locally pseudoconvex as a submanifold of* $\mathbb{C}^3$, submitted for publication.

[O] Oka, K., *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. III. Deuxième problème de Cousin,* J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A, 9 (1939), 7-19.

[S] Schürmann, J., *Embeddings of Stein spaces into affine spaces of minimal dimension,* Math. Ann. 307 (1997), no. 3, 381–399.

[Sr] Suria, G. V., *Holomorphic separatin and the union problem,* Proc. AMS **92** (4) (1984), 538-540.

[U] Ueda, T., *Modifications continues des variétés de Stein,* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **13** (1977), no. 3, pp. 681-686.

[U-T-M] 上田哲生・谷口雅彦・諸沢俊介　複素力学系序説：フラクタルと複素解析　培風館　1995.

[Wm] Wermer, J., *An example concerning polynomial convexity,* Math. Ann. **139** (1959), 147-150.

[W-1] Wold, E. F., *Fatou-Bieberbach domains,* Int. J. Math. **16**(10) (2005), 1119-1130.

[W-2] —, *A Fatou–Bieberbach domain in* $\mathbb{C}^2$ *which is not Runge,* Math. Ann. **340** (2008), 775–780.

[W-3] ——, *A long* $\mathbb{C}^n$ *which is not Stein,* Ark. Mat. **48**(1) (2010), 207-210.

7. 付録

Rosay-Rudin の定理 (cf. [R-R], [A-H])：　$\mathbb{C}^n$ の自己同型 F が固定点 p を持ち、$F'(p)$ の固有値の大きさがすべて 1 未満ならば、F の反復合成列で p に収束する点全体 Ω_F は $\mathbb{C}^n$ に同型な領域となる。

特に F として縮小線形写像に高次の摂動を加えて不動点を 2 個以上持つようにしたものをとれば $\Omega \cong \mathbb{C}^n$ かつ $\Omega_F \subsetneq \mathbb{C}^n$ となる。

[R-R] Rosay, J.-P. and Rudin, W., Holomorphic maps from $\mathbb{C}^n$ to $\mathbb{C}^n$, Trans. Amer. Math. Soc. **310** (1988), 47-86.
[A-H] 足立幸信　平井悦子　$\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^n$ への正則写像について
https://www.cajpn.org/complex/refs/topics-93-3.pdf

Takeo Ohsawa, Graduate School of Mathematics Nagoya University 464-8602 Chikusaku Furocho Nagoya Japan
Email address: `ohsawa@math.nagoya-u.ac.jp`