接触型のGauss-Schwarz理論をめざして

待田芳德

$u=u(x,y)$ on $\Omega\subset\mathbb{C}^2$

$$\begin{tikzcd} & \text{Lie群,代数の表現} \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\ \text{外在幾何} \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{幾何・微分方程式対応}"'] & & \text{線形微分方程式} \end{tikzcd}$$

1) $\begin{cases} u_{xx}=0 \\ u_{yy}=0 \end{cases}$

$u=1,x,y,xy$

$\underline{rk=4}$ (解は1点で, u,u_x,u_y,u_{xy}で決まる)

$\updownarrow$

$$(x,y)\longmapsto[\underset{x_1}{1},\underset{x_2}{x},\underset{x_3}{y},\underset{x_4}{xy}]\in\mathbb{P}^3=\mathbb{P}(V^4)\circlearrowleft SL(4)$$

$$\cup \qquad\qquad \cup$$

$$x_1x_4-x_2x_3=0 \quad Q^2=\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\circlearrowleft SL(2)\times SL(2)\cong SO(4)$$

$A_1\times A_1=D_2$

Segre
テンソル積

2) $\begin{cases} u_{xx}=0 \\ u_{yy}=0 \\ u_{xy}=0 \end{cases}$

$u=1,x,y$

$\underline{rk=3}$ (解は1点で, u,u_x,u_yで決まる)

$\updownarrow$

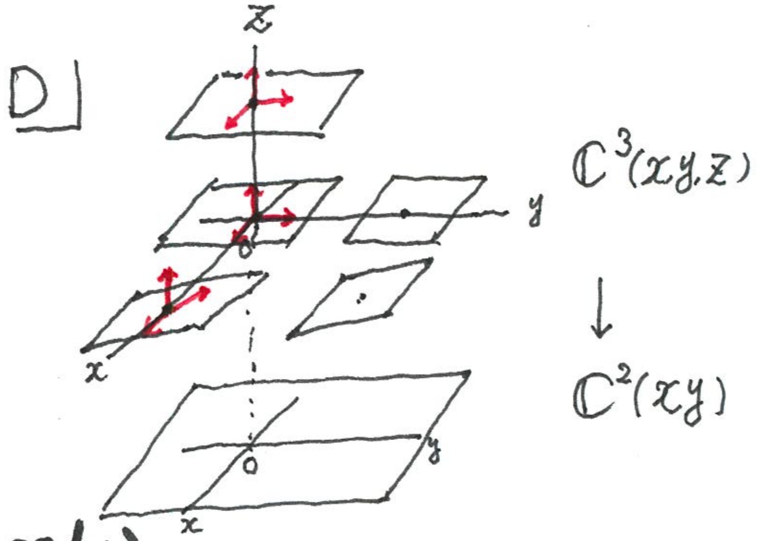
$$(x,y)\longmapsto[1,x,y]\in\mathbb{P}^2=\mathbb{P}(V^3)\circlearrowleft SL(3)$$

A_2

標準表現

接触化（1),2)の）

$$\mathbb{C}^3 : (x,y,z) \quad \left(\begin{array}{l} X := \frac{\partial}{\partial x} \\ Y := \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z} \\ Z := \frac{\partial}{\partial z} \end{array}\right.$$



$$[X,Y] = XY - YX = \frac{\partial}{\partial z} = Z$$

$$D := \langle X, Y\rangle = \mathrm{Ker}\,\theta \ (\theta = dz - x\,dy)$$

接触構造

$$\left(\begin{array}{l} X^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ Y^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{array}\right.$$

$u = u(x,y,z)$ on $\Omega \subset \mathbb{C}^3$

(1) $\left\{\begin{array}{l} X^2 u = 0 \\ Y^2 u = 0 \end{array}\right.$

$$u = 1, x, y, z, xy, xz, y(z-xy), z(z-xy)$$

rk = 8（解は1点で，$u, Xu, Yu, Zu, XYu, XZu, YZu, Z^2u$で決まる）

$$\updownarrow$$

$$(x,y,z) \longmapsto [1, x, y, z, \underset{\substack{z-xy \\ x_5}}{xy}, xz, y(z-xy), z(z-xy)] \in \mathbb{P}^7 = \mathbb{P}(V^8) \circlearrowleft SL(8)$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8$

$$\mathbb{P}^7 \supset Q^6 \qquad SL(8) \supset \rho(SL(3))$$

$$x_1x_6 - x_2x_4 = 0, \quad x_1x_7 - x_3x_5 = 0$$

$$x_1x_8 - x_4x_5 = 0, \quad x_3x_8 - x_4x_7 = 0$$

$$-2x_1x_8 - x_2x_7 - x_3x_6 + x_4^2 + x_5^2 = 0$$

V^8上 実で(5,3)型 2次形式

$$PT^*\mathbb{P}^2 = \underset{tr=0}{\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2} \subset Q^6$$

随伴表現

(2) $\left\{\begin{array}{l} X^2u=0 \\ Y^2u=0 \\ (XY+YX)u=0 \end{array}\right.$

$u=1,x,y,xy-2z$

$rk=4$

$\left((XY+YX)u=(2XY-Z)u \right.$
$= 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}+\frac{\partial u}{\partial z}$

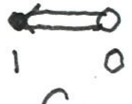
（解は1点で, u, Xu, Yu, XYu (or Zu) で決まる）

$\updownarrow$

$$(x,y,z) \longmapsto [1.x.y.xy-2z] \in P^3 = P(V^4) \circlearrowleft SL(4) \supset Sp(4)$$

$\Omega(f,g)=\frac{1}{2}Z(f)g-\frac{1}{2}Z(g)f+X(f)Y(g)-X(g)Y(f)$ on V^4

(



C_2

$$\Omega = \begin{array}{c|cccc} & 1 & x & y & -xy+2z \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & 0 & 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -xy+2z & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

V^4上　シンプレクティック形式

$\mathbb{P}^3$上　射影接触構造

変形 (1),2) ; (1),(2)の)

1) $\begin{cases} u_{xx} = a_1 u_{xy} + a_2 u_x + a_3 u_y + a_4 u \\ u_{yy} = b_1 u_{xy} + b_2 u_x + b_3 u_y + b_4 u \end{cases}$ (I.C.)

(a_i, b_i は x y の関数

(rk=4

2) $\begin{cases} u_{xx} = a_1 u_x + a_2 u_y + a_3 u \\ u_{yy} = b_1 u_x + b_2 u_y + b_3 u \\ u_{xy} = c_1 u_x + c_2 u_y + c_3 u \end{cases}$ (I.C.)

(a_i, b_i, c_i は x y の関数

(rk=3

接触化 (1), 2)の)

(a_i, b_i は x y z の関数

(rk=8

(1) $\begin{cases} X^2 u = a_1 Z^2 u + a_2 XZu + a_3 YZu + a_4 Zu + a_5 XYu + a_6 Xu + a_7 Yu + a_8 u \\ Y^2 u = b_1 Z^2 u + b_2 XZu + b_3 YZu + b_4 Zu + b_5 XYu + b_6 Xu + b_7 Yu + b_8 u \end{cases}$ (I.C

(2) $\begin{cases} X^2 u = a_1 Xu + a_2 Yu + a_3 u \\ Y^2 u = b_1 Xu + b_2 Yu + b_3 u \\ (XY+YX)u = c_1 Xu + c_2 Yu + c_3 u \end{cases}$ (I.C.)

(a_i, b_i, c_i は x y z の関数

(rk=4

局所同値問題では、係数は *holomorphic* (*smooth*) で考える。

超幾何微分方程式の係数は、**確定特異性**をもつ。

接触化ではどう拡張するか。

↳ **超幾何関数**

3つの顔
- 級数
- 微分方程式
- 積分表示

↳ 基本素材として、2変数超幾何関数

Appell の F_1, F_4

$rk=3$ $rk=4$

めざすべきもの

○ 3変数接触型の非可換微分作用素の

(1) 超幾何関数の構成

(2) Gauss-Schwarz理論の構成

※ マッチー、白秋の夢!!

cf. クロネッカー、青春の夢

(人生の四季
玄冬、青春、朱夏、白秋、

(1)超幾何関数の構成

○ 1変数　Gauss

• 級数

$$F(a,b,c;x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m\, m!}x^m$$

$$=1+\frac{a\cdot b}{c\cdot 1}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)\cdot 2\cdot 1}x^2+\cdots$$

Pochhammerの記号

$$(a)_m=\begin{cases}1 & (m=0)\\ a(a+1)\cdots(a+m-1) & (m\geq 1)\end{cases}$$

- $\times\ m!=(1)_m$
- $\times\ (a)_m=\dfrac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)}$

$c\notin\mathbb{Z}_{\leq 0}$, $a,b,c\in\mathbb{C}$

$a,b\notin\mathbb{Z}_{\leq 0}$として, $|x|<1$

• 微分方程式

$E(a,b,c)$:

$$x(1-x)u''+(c-(a+b+1)x)u'-abu=0$$

2階, 線形, ODE

特異点は, $x=0,1$ (∞も入る)

確定特異点型 i.e. Fuchs型

- $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$で解析接続, 多価関数

  $x=0$で正則, $u(0)=1$として, $u=F(a,b,c;x)$

- $x=0$で $\begin{cases}u_1(x)=F(a,b,c;x)\\ u_2(x)=x^{1-c}F(a-c+1,b-c+1,2-c;x)\end{cases}$

∵ $D = x\frac{d}{dx}$ として，

$$\big((D+c-1)D - x(D+a)(D+b)\big)u=0$$

$$\big((1-x)D^2+(c-1-(a+b)x)D-abx\big)u=0$$

• 積分表示

$$F(a,b,c;x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-xu)^{-b}du$$

（広義積分の収束のため, $\mathrm{Re}(a)>0$, $\mathrm{Re}(c-a)>0$

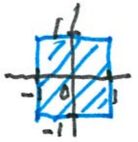
↕

さらなること

- 線形Pfaff系
- 特異点集合（特異ローカス）
- Riemann図式
- モノドロミー群（基本群も）

○ ２変数 Appell

• 級数



$$F_1(a,b,b',c;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_m(b')_n}{(c)_{m+n}\,m!\,n!}x^m y^n \qquad (|x|<1,|y|<1)$$

$$F_4(a,b,c,c';x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_{m+n}}{(c)_m(c')_n\,m!\,n!}x^m y^n \qquad (\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}<1)$$

($F_2(a,b,b',c,c';x,y)$, $F_3(a,\alpha,b,b',c;x,y)$
他に, Hornのリスト10個

• 微分方程式

$$E_1(a,b,b',c)\ \begin{cases} x(1-x)u_{xx}+y(1-x)u_{xy}+(c-(a+b+1)x)u_x-byu_y-abu=0 \\ y(1-y)u_{yy}+x(1-y)u_{xy}+(c-(a+b'+1)y)u_y-b'xu_x-ab'u=0 \end{cases}$$

$$E_4(a,b,c,c')\ \begin{cases} x(1-x)u_{xx}-y^2u_{yy}-2xyu_{xy}+(c-(a+b+1)x)u_x-(a+b+1)yu_y-abu=0 \\ y(1-y)u_{yy}-x^2u_{xx}-2xyu_{xy}+(c'-(a+b+1)y)u_y-(a+b+1)xu_x-abu=0 \end{cases}$$

$D_x = x\frac{\partial}{\partial x}$, $D_y = y\frac{\partial}{\partial y}$ として，

$$E_1(a,b,b'.c)\ \begin{cases}((D_x+D_y+c-1)D_x - x(D_x+D_y+a)(D_x+b))u=0\\ ((D_x+D_y+c-1)D_y - y(D_x+D_y+a)(D_y+b'))u=0\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}((1-x)D_x^2+(1-x)D_xD_y+(c-1-(a+b)x)D_x-bxD_y-abx)u=0\\ ((1-y)D_y^2+(1-y)D_xD_y+(c-1-(a+b')y)D_y-b'yD_x-ab'y)u=0\end{cases}$$

$$E_4(a,b,c,c')\ \begin{cases}((D_x+c-1)D_x - x(D_x+D_y+a)(D_x+D_y+b))u=0\\ ((D_y+c'-1)D_y - y(D_x+D_y+a)(D_x+D_y+b))u=0\end{cases}$$

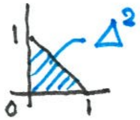
$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}((1-x)D_x^2-xD_y^2-2xD_xD_y+(c-1-(a+b)x)D_x-(a+b)xD_y-abx)u=0\\ ((1-y)D_y^2-yD_x^2-2yD_xD_y+(c'-1-(a+b)y)D_y-(a+b)yD_x-aby)u=0\end{cases}$$

● 積分表示

$$F_1(a.b.b'.c;x.y)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-xu)^{-b}(1-yu)^{-b'}du$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(b')\Gamma(c-b-b')}\iint_{\Delta^2} u_1^{b-1}u_2^{b'-1}(1-u_1-u_2)^{c-b-b'-1}(1-xu_1-yu_2)^{-a}du_1\wedge du_2$$



$$F_4(a.b.c.c';x,y)=\frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-c)\Gamma(1-c')\Gamma(c+c'-a-1)}\iint_{\Delta^2} u_1^{-c}u_2^{-c'}(1-u_1-u_2)^{c+c'-a-2}\left(1-\frac{x}{u_1}-\frac{y}{u_2}\right)^{-b}du_1\wedge du_2$$

$$E_1(a,b,b',c)\begin{cases} u_{xx} = -\dfrac{y}{x}u_{xy} - \dfrac{c-(a+b+1)x}{x(1-x)}u_x + \dfrac{by}{x(1-x)}u_y + \dfrac{ab}{x(1-x)}u \\ u_{yy} = -\dfrac{x}{y}u_{xy} - \dfrac{c-(a+b'+1)y}{y(1-y)}u_y + \dfrac{b'x}{y(1-y)}u_x + \dfrac{ab'}{y(1-y)}u \\ u_{xy} = \dfrac{b'}{x-y}u_x - \dfrac{b}{x-y}u_y \end{cases}$$

(Schwarz 微分)

$$E_4(a.b.c.c')\begin{cases} u_{xx} = \dfrac{2y}{1-x-y}u_{xy} - \dfrac{c(1-y)-(a+b+1)x}{x(1-x-y)}u_x - \dfrac{c'y-(a+b+1)y}{x(1-x-y)}u_y + \dfrac{ab}{x(1-x-y)}u \\ u_{yy} = \dfrac{2x}{1-x-y}u_{xy} - \dfrac{cx-(a+b+1)x}{y(1-x-y)}u_x - \dfrac{c'(1-x)-(a+b+1)y}{y(1-x-y)}u_y + \dfrac{ab}{y(1-x-y)}u \end{cases}$$

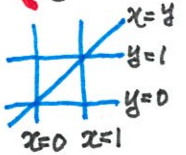
$E_1(a,b,b',c)$ について：

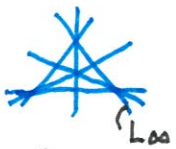
- $(x,y)=(0.0)$ で正則 $u(0.0)=1$ として $u=F_1(a,b,b',c;x,y)$
- 解は、3次元ベクトル空間
- 特異点集合 $\mathbb{C}^2 \supset S = \{x=0\}\cup\{x=1\}\cup\{y=0\}\cup\{y=1\}\cup\{x=y\}$

$\widehat{\mathbb{P}}^2 \supset \overline{S} = S \cup L_\infty$ (無限遠直線)

$(x,y)=(0,0)$ で

基本系
$$\begin{cases} \cdot F_1(a,b,b',c;x,y) \\ \cdot x^{1-c}F_1(a+1-c,b+1-c,b',2-c;x,y) \\ \cdot y^{1-c}F_1(a+1-c,b,b'+1-c,2-c;x,y) \end{cases}$$





$E_4(a,b,c,c')$ について：

- $(x,y)=(0.0)$ で正則 $u(0.0)=1$ として $u=F_4(a,b,c,c';x,y)$
- 解は、4次元ベクトル空間
- 特異点集合 $\mathbb{C}^2 \supset S = \{x=0\}\cup\{y=0\}\cup C(\cup A)$

$\widehat{\mathbb{P}}^2 \supset \overline{S} = S \cup L_\infty \quad C=\{(x-y)^2-2(x+y)+1=0\}$

$(x,y)=(0,0)$ で

基本系
$$\begin{cases} \cdot F_4(a,b,c,c';x,y) \\ \cdot x^{1-c}F_4(a+1-c,b+1-c,2-c,c';x,y) \\ \cdot y^{1-c'}F_4(a+1-c',b+1-c',c,2-c';x,y) \\ \cdot x^{1-c}\cdot y^{1-c'}F_4(a+2-c-c',b+2-c-c',2-c,2-c';x,y) \end{cases}$$

⊙ 3変数 接触型

- $\mathbb{C}^3 : (x, y. z)$ $\quad X = \frac{\partial}{\partial x}$

$$Y = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\left(\begin{array}{l} [X, Y] = Z \\ D = \langle X, Y \rangle = \mathrm{Ker}\,\theta \quad (\theta = dz - x\,dy) \end{array} \right.$$

- $D_x := xX + xyZ = x\left(\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}\right)$ $\qquad D_x x^p = p x^p$

$D_Y := yY = y\left(\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}\right)$ $\qquad D_Y y^q = q y^q$

$D_Z := -(xy - z)Z$ $\qquad D_Z (xy-z)^r = r(xy-z)^r$

- $$\times \left(\begin{array}{l} D_x \left(x^p y^q (xy-z)^r \right) = p x^p y^q (xy-z)^r \\ D_Y \left(x^p y^q (xy-z)^r \right) = q x^p y^q (xy-z)^r \\ D_Z \left(x^p y^q (xy-z)^r \right) = r x^p y^q (xy-z)^r \end{array} \right.$$

$$\times \left(\begin{array}{l} D_x \left(y^q (xy-z)^r \right) = 0 \\ D_Y \left(x^p (xy-z)^r \right) = 0 \\ D_Z \left(x^p y^q \right) = 0 \end{array} \right.$$

$$\times \left(\begin{array}{lll} D_x D_Y = D_Y D_x & \text{i.e.} & [D_x, D_Y] = 0 \\ D_x D_Z = D_Z D_x & \text{i.e.} & [D_x, D_Z] = 0 \\ D_Y D_Z = D_Z D_Y & \text{i.e.} & [D_Y, D_Z] = 0 \end{array} \right.$$

- $f(x,y,z)=\sum_{p,q,r=0}^{\infty} A_{p,q,r}\, x^p y^q (xy-z)^r$ として，

$$\begin{cases} \dfrac{A_{p+1,q,r}\, x^{p+1} y^q (xy-z)^r}{A_{p,q,r}\, x^p y^q (xy-z)^r} =: \dfrac{F(p,q,r)}{F'(p,q,r)}\, x \\ \dfrac{A_{p,q+1,r}\, x^p y^{q+1} (xy-z)^r}{A_{p,q,r}\, x^p y^q (xy-z)^r} =: \dfrac{G(p,q,r)}{G'(p,q,r)}\, y \\ \dfrac{A_{p,q,r+1}\, x^p y^q (xy-z)^{r+1}}{A_{p,q,r}\, x^p y^q (xy-z)^r} =: \dfrac{H(p,q,r)}{H'(p,q,r)} (xy-z \end{cases}$$

Prop $f(x,y,z)$は，次の微分方程式をみたす：

$$\begin{cases} (F'(D_x-1,D_y,D_z)-xF(D_x,D_y,D_z))f=0 \\ (G'(D_x,D_y-1,D_z)-yG(D_x,D_y,D_z))f=0 \\ (H'(D_x,D_y,D_z-1)-(xy-z)H(D_x,D_y,D_z))f=0 \end{cases}$$

- **級数**　接触型・3変数超幾何関数 $\mathcal{F}_1$，$\mathcal{F}_4$

$$\mathcal{F}_1(a,b,b',b'',c;x,y,z)=\sum_{p,q,r=0}^{\infty} \frac{(a)_{p+q+r}(b)_p(b')_q(b'')_r}{(c)_{p+q+r}\, p!\, q!\, r!} x^p y^q (xy-z)^r$$

$$\mathcal{F}_4(a,b,c,c',c'';x,y,z)=\sum_{p,q,r=0}^{\infty} \frac{(a)_{p+q+r}(b)_{p+q+r}}{(c)_p(c')_q(c'')_r\, p!\, q!\, r!} x^p y^q (xy-z)^r$$

• 微分方程式 接触型・3変数超幾何方程式 $\mathcal{E}_1$. $\mathcal{E}_4$

$\mathcal{E}_1(a.b.b'.b''.c)$

$$\begin{cases}\{(D_x+D_Y+D_Z+c-1)D_x-x(D_x+D_Y+D_Z+a)(D_x+b)\}u=0\\ \{(D_x+D_Y+D_Z+c-1)D_Y-y(D_x+D_Y+D_Z+a)(D_Y+b')\}u=0\\ \{(D_x+D_Y+D_Z+c-1)D_Z-(xy-z)(D_x+D_Y+D_Z+a)(D_Z+b'')\}u=0\end{cases}$$

$\downarrow$

$$\begin{cases}((1-x)D_x^2+(1-x)D_xD_Y+(1-x)D_xD_Z+(c-1-(a+b)x)D_x-bxD_Y-bxD_Z-abx)u=0\\ ((1-y)D_Y^2+(1-y)D_xD_Y+(1-y)D_YD_Z+(c-1-(a+b')y)D_Y-b'yD_x-b'yD_Z-ab'y)u=0\\ ((1-(xy-z))D_Z^2+(1-(xy-z))D_xD_Z+(1-(xy-z))D_YD_Z+(c-1-(a+b'')(xy-z))D_Z-b''(xy-z)D_x\\ \qquad -b''(xy-z)D_Y-ab''(xy-z))u=0\end{cases}$$

$\downarrow$

$$\begin{cases}x(1-x)X^2u+y(1-x)XYu+(1-x)yzZ^2u+(1-x)(xy+z)XZu+(1-x)y^2YZu\\ \qquad +((c-(a+b+1)x)y+b(xy-z))Zu+(c-(a+b+1)x)Xu-byYu-abu=0\\ y(1-y)Y^2u+x(1-y)XYu+(1-y)zYZu-b'zZu-b'xXu+(c-(a+b+1)y)Yu-ab'u=0\\ z(xy-z-1)Z^2u+x(xy-z-1)XZu+y(xy-z-1)YZu+(\underbrace{(a+1)xy-(a+b''+1)z-c}_{\substack{\shortparallel\\ -(c-(a+b''+1)(xy-z)-b''xy}})Zu-b''xXu-b''yYu-ab''u=0\end{cases}$$

$\mathcal{E}_4(a.b.c.c'.c'')$

$$\begin{cases} ((D_X+c-1)D_X-x(D_X+D_Y+D_Z+a)(D_X+D_Y+D_Z+b))u=0 \\ ((D_Y+c'-1)D_Y-y(D_X+D_Y+D_Z+a)(D_X+D_Y+D_Z+b))u=0 \\ ((D_Z+c''-1)D_Z-(xy-z)(D_X+D_Y+D_Z+a)(D_X+D_Y+D_Z+b))u=0 \end{cases}$$

$$\Big\downarrow$$

$$\begin{cases} ((1-x-y)D_X^2-xD_Z^2-2xD_XD_Y-2xD_XD_Z-2xD_YD_Z+(c-1-(a+b)x)D_X+(c'-(a+b+1))xD_Y \\ \qquad -(a+b)xD_Z-abx)u=0 \\ ((1-x-y)D_Y^2-yD_Z^2-2yD_XD_Y-2yD_XD_Z-2yD_YD_Z+(c'-1-(a+b)y)D_Y+(c-(a+b+1))yD_X \\ \qquad -(a+b)yD_Z-aby)u=0 \\ (D_X^2+D_Y^2+(1-\frac{1}{xy-z})D_Z^2+2D_XD_Y+2D_XD_Z+2D_YD_Z+(a+b-\frac{c''-1}{xy-z})D_Z \\ \qquad +(a+b)D_X+(a+b)D_Y+ab)u=0 \end{cases}$$

$$\Big\downarrow$$

$$\begin{cases} x(1-x-y)X^2u+(xy^2(1-y)-z^2)Z^2u-2xyXYu+2x(-y^2+y-z)XZu-2yzYZu \\ \qquad +(c(1-y)-(a+b+1)x)Xu+(c'-(a+b+1))yYu+(cy(1-y)-(a+b+1)z)Zu-abu=0 \\ y(1-x-y)Y^2u+(x^2y^2-z^2)Z^2u-2xyXYu+2x(xy-z)XZu-2yzYZu \\ \qquad +(c-(a+b+1))xXu+(c'(1-x)-(a+b+1)y)Yu+(cxy-(a+b+1)z)Zu-abu=0 \\ -x^2X_u^2-y^2Y_u^2+(xy-z-z^2)Z^2u-2xyXYu-2xzXZu-2yzYZu \\ \qquad -(a+b+1)xXu-(a+b+1)yYu-(c''+(a+b+1)z)Zu-abu=0 \end{cases}$$

Prop. $\mathcal{E}_1(a, b, b', b'', c)$ について

- $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ で正則，$u(0, 0, 0) = 1$ として，$u = \mathcal{F}_1(a, b, b', b'', c; x, y, z)$
- 解は，4次元ベクトル空間

  $c \neq 1$ として，次の4つの独立解をもつ：

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(a, b, b', b'', c; x, y, z) \\ \underline{x^{1-c}} \cdot \mathcal{F}_1(a+1-c, | b+1-c, b', b'', | 2-c; x, y, z) \\ \underline{y^{1-c}} \cdot \mathcal{F}_1(a+1-c, | b, b'+1-c, b'', | 2-c; x, y, z) \\ \underline{(xy-z)^{1-c}} \cdot \mathcal{F}_1(a+1-c, | b, b', b''+1-c, | 2-c; x, y, z) \end{cases}$$

$\mathcal{E}_4(a, b, c, c', c'')$ について

- $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ で正則，$u(0, 0, 0) = 1$ として，$u = \mathcal{F}_4(a, b, c, c', c''; x, y, z)$
- 解は，8次元ベクトル空間

  $c \neq 1, c' \neq 1, c'' \neq 1$ として，次の8つの独立解をもつ：

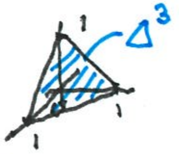
$$\begin{cases} \mathcal{F}_4(a, b, c, c', c''; x, y, z) \\ \underline{x^{1-c}} \cdot \mathcal{F}_4(a+1-c, b+1-c, | 2-c, c', c'') \\ \underline{y^{1-c'}} \cdot \mathcal{F}_4(a+1-c', b+1-c', | c, 2-c', c'') \\ \underline{(xy-z)^{1-c''}} \cdot \mathcal{F}_4(a+1-c'', b+1-c'', | c, c', 2-c'') \end{cases} \begin{cases} \underline{x^{1-c}y^{1-c'}} \mathcal{F}_4(a+2-c-c', b+2-c-c', | 2-c, 2-c', c'') \\ \underline{x^{1-c}(xy-z)^{1-c''}} \cdot \mathcal{F}_4(a+2-c-c'', b+2-c-c'', | 2-c, c', 2-c'') \\ \underline{y^{1-c'}(xy-z)^{1-c''}} \cdot \mathcal{F}_4(a+2-c'-c'', b+2-c'-c'', | c, 2-c', 2-c'') \\ \underline{x^{1-c}y^{1-c'}(xy-z)^{1-c''}} \mathcal{F}_4(a+2-c-c'-c'', b+2-c-c'-c'', | 2-c, 2-c', 2-c'') \end{cases}$$

• 積分表示

$$\mathcal{F}_1(a,b,b',b'',c;x,y,z)$$

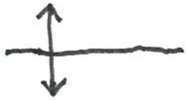
$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}\int_{\Delta^1}u^{a-1}(1-u)^{b-a-1}(1-xu)^{-b}(1-yu)^{-b'}(1-(xy-z)u)^{-b''}du$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(b')\Gamma(b'')\Gamma(c-b-b'-b'')}\int_{\Delta^3}u_1^{b-1}u_2^{b'-1}u_3^{b''-1}(1-u_1-u_2-u_3)^{c-b-b'-b''-1}\left(1-\frac{x}{u_1}-\frac{y}{u_2}-\frac{xy-z}{u_3}\right)^{-a}du_1\wedge du_2\wedge d$$



$$\mathcal{F}_4(a,b,c,c',c'';x,y,z)$$

$$=\frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-c)\Gamma(1-c')\Gamma(1-c'')\Gamma(c+c'+c''-a-2)}\int_{\Delta^3}u_1^{-c}u_2^{-c'}u_3^{-c''}(1-u_1-u_2-u_3)^{c+c'+c''-a-3}\left(1-\frac{x}{u_1}-\frac{y}{u_2}-\frac{xy-z}{u_3}\right)^{-b}du_1\wedge du_2\wedge du_3$$



(2) Gauss-Schwarz理論の構成

・関数,写像

1対多 ― 多価関数

多対1 ― 周期関数

cf. 1即多 多即一 華厳経

ex. ・指数関数 ↔ 対数関数

⊙ 楕円関数 ↔ 超幾何関数

・1変数

Gaussの HGDE

$$E(a,b,c): x(1-x)u''+(c-(a+b+1)x)u'-abu=0$$

$a,b,c\in\mathbb{Q}\,(\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C})$

基本解 $u_1(x), u_2(x)$

Riemann図式

$$\left\{\begin{array}{ccc} x=0 & x=1 & x=\infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{array}\right\}$$

$$\downarrow$$

$$u_1(x)=F(a,b,c;x)$$

$$u_2(x)=x^{1-c}F(a-c+1,b-c+1,2-c;x)$$

$$\zeta(x) := \frac{u_1(x)}{u_2(x)}$$ 多価，局所的に正則

$\zeta : \mathbb{C} - \{0.1\} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ **Schwarz写像**

$(\mathbb{P}^1 - \{0.1.\infty\})$

ζの像を調べる.

別の基本解 $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$

$$\begin{cases} \tilde{u}_1 = a u_1 + b u_2 \\ \tilde{u}_2 = c u_1 + d u_2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2)$$

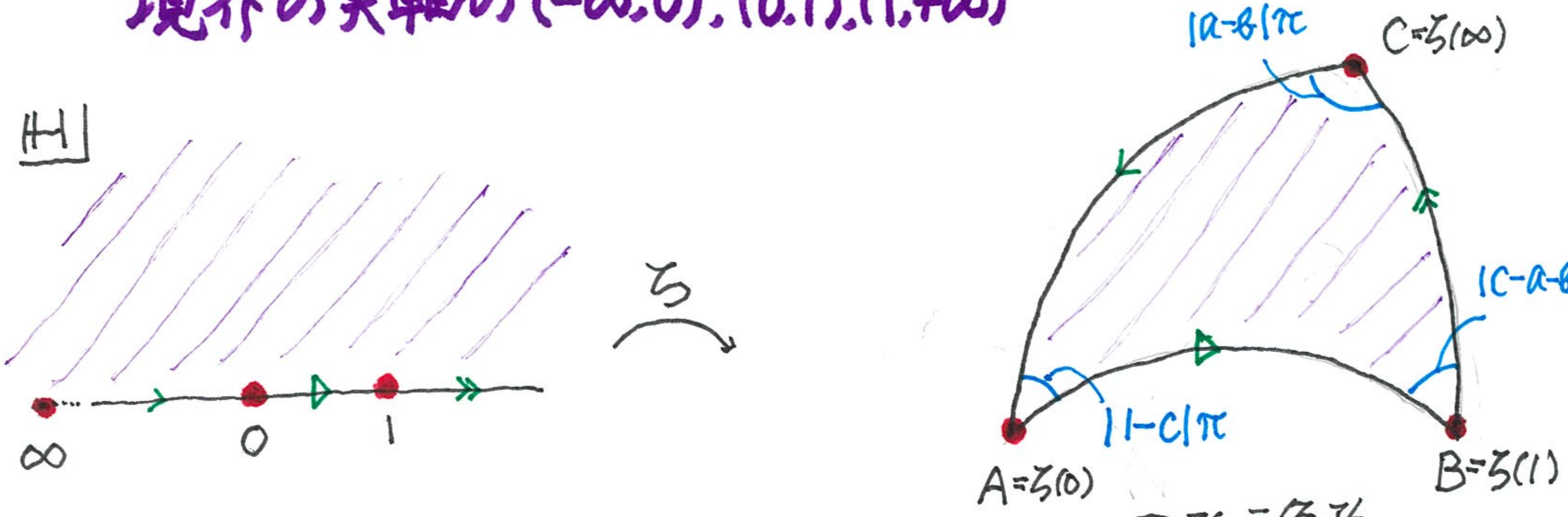
$$\frac{\tilde{u}_1}{\tilde{u}_2} = \frac{a u_1 + b u_2}{c u_1 + d u_2} = \frac{a\zeta(x)+b}{c\zeta(x)+d}$$

1次分数変換　円々対応をもつ

上半平面 $\mathbb{H} = \{x \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, x > 0\}$ 単連結領域

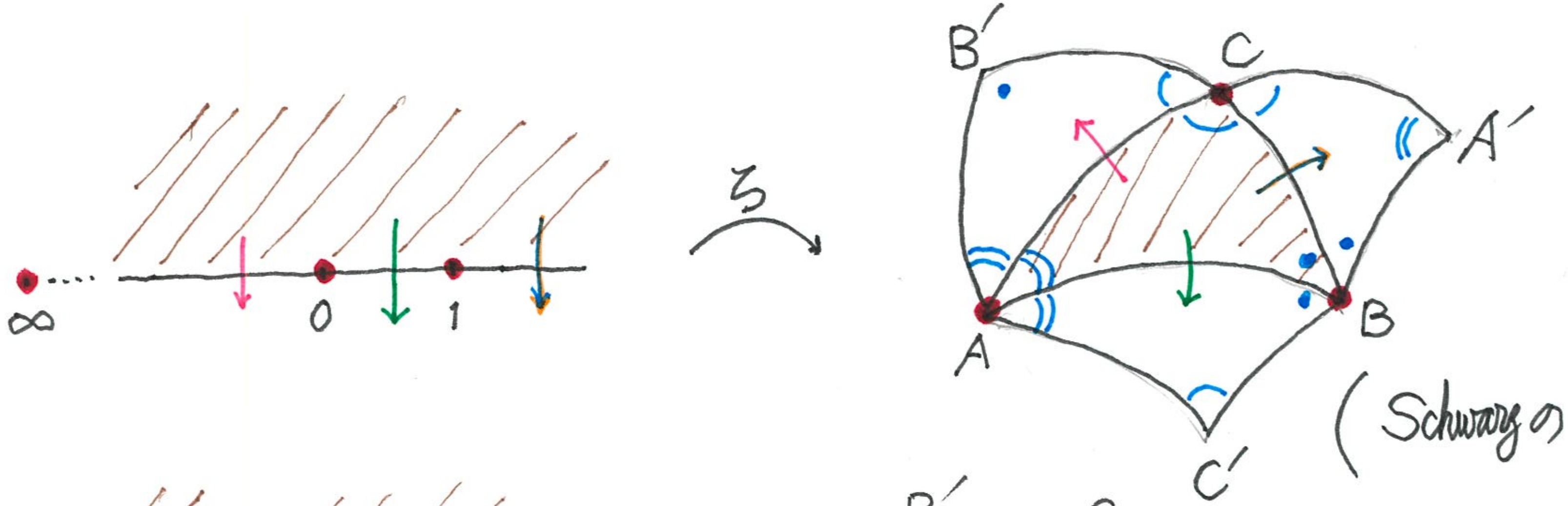
境界の実軸の $(-\infty.0).(0.1).(1.+\infty)$

$(x^{\alpha} = e^{\alpha \log x}\ (x \neq 0)$

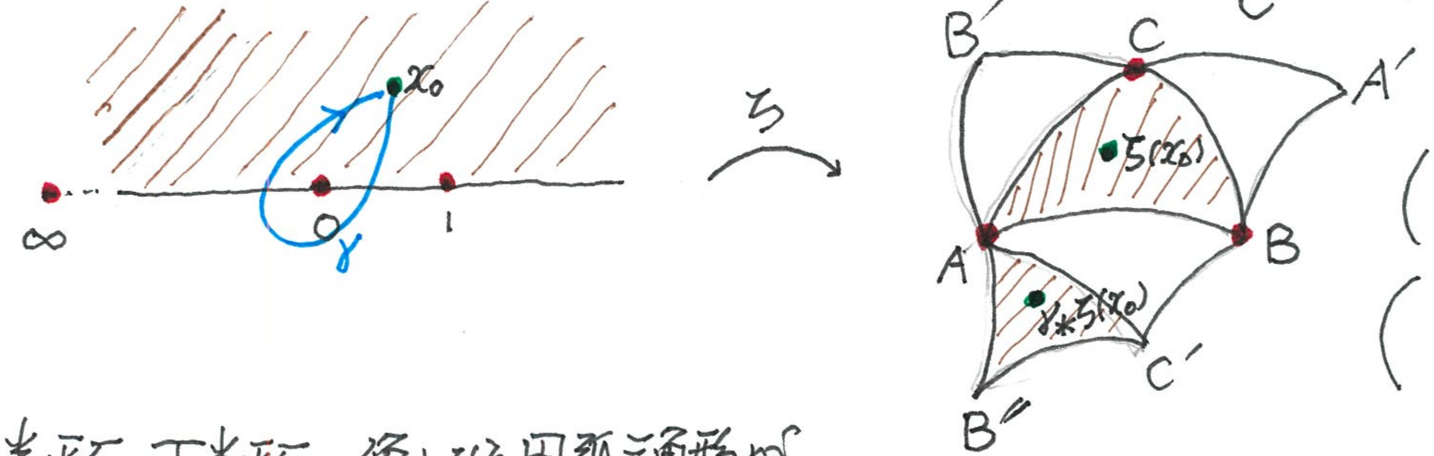


円弧三角形

(Riemannの写像定理



(Schwarzの鏡像原理



($\gamma \in \pi_1(\mathbb{C}-\{0,1\}, x_0)$

(モノドロミー群
$M: \pi_1(\mathbb{C}-\{0,1\}, x_0) \to GL(2)$

上半平面，下半平面の像となる円弧三角形が
互いに重なり合わないで分割される i.e.

円弧三角形のタイルばり

⇔ ちの逆写像ち$^{-1}$が，ちの像領域上**1価**となる.

これを仮定する

$$\angle A = |1-c|\pi = \frac{\pi}{\ell} \quad \text{i.e.} \quad |1-c| = \frac{1}{\ell}$$

$$\angle B = |c-a-b|\pi = \frac{\pi}{m} \quad \text{i.e.} \quad |c-a-b| = \frac{1}{m} \qquad \ell, m, n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \{+\infty\}$$

$$\angle C = |a-b|\pi = \frac{\pi}{n} \quad \text{i.e.} \quad |a-b| = \frac{1}{n}$$

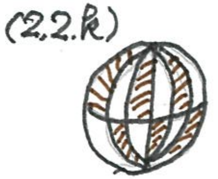
△ABCの内角の和

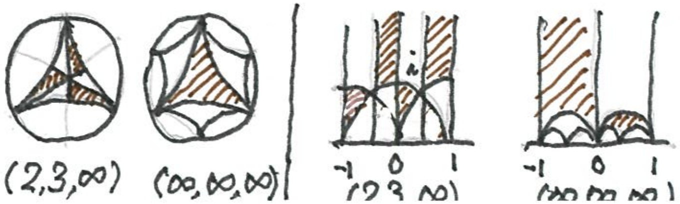
$$\angle A + \angle B + \angle C \begin{cases} > \pi \\ = \pi \\ < \pi \end{cases} \Longleftrightarrow \frac{1}{\ell} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \begin{cases} > 1 \\ = 1 \\ < 1 \end{cases}$$

⟺
- (I) $\mathbb{P}^1$ での三角形のタイルばり → ちの像は $\mathbb{P}^1$
- (II) $\mathbb{C}$ での 〃 → 〃 $\mathbb{C}$
- (III) $\Delta \cong \mathbb{D} \cong \mathbb{H}$ での 〃 → 〃 $\Delta \cong \mathbb{D} \cong \mathbb{H}$

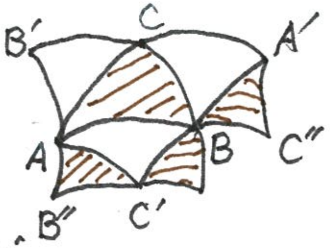
（Δ：$\mathbb{P}^1$ でのある円板、$\mathbb{D}$：単位円板）

- (I) 4種類 (2,2,k), (2,3,3), (2,3,4), (2,3,5)
- (II) 4個 (2,2,∞), (2,3,6), (2,4,4), (3,3,3)
- (III) 無限個 (2,3,∞), (∞,∞,∞) | (2,3,7)など





鏡映群，モノドロミー群

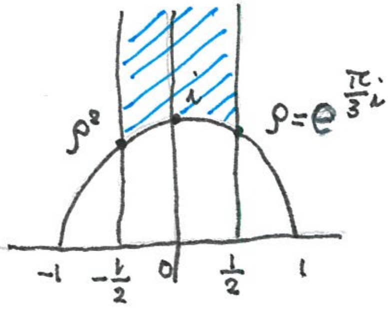


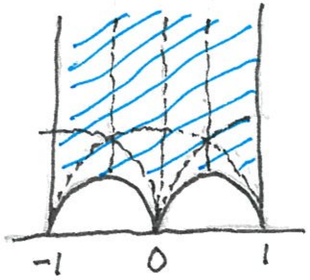
折り返しで生成される.

斜線と白色の「三角形」を2つ合わせた「四角形」が
基本領域

$\Gamma = \Gamma(l,m,n)$ Schwarzの三角群

(Ⅰ) 有限群	$\Gamma(2,2,k) = D_k$	$\# = 2k$	2面体群
	$\Gamma(2,3,3) = G(P_4) \cong A_4$	$\# = 12$	正4面体群
	$\Gamma(2,3,4) = G(P_8) \cong S_4$	$\# = 24$	正8面体群
	$\Gamma(2,3,5) = G(P_{20}) \cong A_5$	$\# = 60$	正20面体群
(Ⅱ) 無限群	$\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$		
(Ⅲ) 無限群	$\Gamma(2,3,\infty) = SL(2,\mathbb{Z})$		モジュラー群
	$\Gamma(\infty,\infty,\infty) = \Gamma(2) = \{g \in SL(2,\mathbb{Z}) \mid g \equiv I \bmod 2\}$		レベル2の主合同部分群





Schwarzの保型関数 $\eta = \text{ち}^{-1}$

(I) ガロア的有理関数　Γは D_k, $G(P_4)$, $G(P_8)$, $G(P_{20})$

次数 $2k$, 12, 24, 60

(II) 周期関数 − 三角関数　Γは $\mathbb{Z}$

2重周期関数 − 楕円関数　Γは $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$

(III) $(l,m,n)=(2,3,\infty)$ − 楕円モジュラー関数 $J(z)$　Γは $SL(2,\mathbb{Z})$

$(l,m,n)=(\infty,\infty,\infty)$ − モジュラー関数 $\lambda(z)$　Γは $\Gamma(2)$

まとめ　Gauss の HGDE : $E(a,b,c)$ given

Schwarz写像

$$\text{ち} : M = \mathbb{P}^1 - \{0,1,\infty\} \xrightarrow{\text{多価}} X = \text{ち}(M) = \mathbb{P}^1, \mathbb{C}, \mathbb{H} \curvearrowleft \Gamma = \Gamma(l,m,n)$$

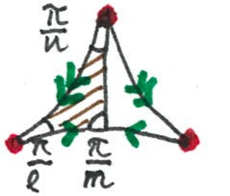
$\mathbb{P}^1 \cup$　　$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) = PGL(2) \cup$

$$\xleftarrow{\text{1価, }\Gamma\text{-不変}}$$

Schwarzの保型関数

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] & X \subset \mathbb{P}^1 \arrow[d, "\pi"] \\ & X/\Gamma \arrow[ul, "\sim"] \end{tikzcd}$$

cf. 解の空間 → 係数の空間



四角形が Γの基本領域

軌道体 orbifold

◦考え方

$\mathfrak{s} : M=\mathbb{C}^n-S \longrightarrow \mathbb{P}^r=\mathbb{P}(V^{r+1})$ **Schwarz写像**

$(\mathbb{P}^n-\bar{S})$

多価
値域は？
(ex. 微分方程式の解
周期積分

$\rotatebox{90}{$\in$} \qquad\qquad\qquad \rotatebox{90}{$\in$}$

$\mathfrak{s} : (x_1,\cdots,x_n) \longmapsto [u_1,\cdots,u_{r+1}]$

(ex. 配置空間
モジュライ空間

$^{\exists}(X,\Gamma,\pi)$

$X^n \subset \mathbb{P}^r$, $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(X) \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^r)=PGL(r+1)$

$$\begin{tikzcd}
M=\mathbb{P}^n-\bar{S} \arrow[r, "\mathfrak{s}"] \arrow[dr, "\sim"'] & X^n \curvearrowleft \Gamma \arrow[d, "\pi"] \\
& X/\Gamma
\end{tikzcd}$$

$(\downarrow$ orbifold
$\uparrow$ 分岐被覆$)$

固有不連続群
(ex. モノドロミー群

Γ-保型関数

(ex. 保型関数
モジュラー関数

1価 有理型
(正則)

π : 射影, 分岐被覆写像

π^{-1} : 展開写像, 一意化

- ⊙ DEを与えて, 保型関数を求める
  1対多　多対1
- ⊙ 保型関数を与えて, DEを求める
  Schwarz写像
  多対1　1対多

○ 2変数

既知

- **rk=3** ex. $E_1(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3})$ Picard

$$M=\mathbb{C}^2-S \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

$$\cup$$

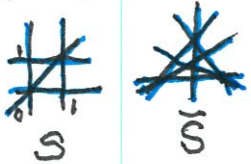
$$X=\mathbb{B}^2 \curvearrowleft \Gamma=SU(2,1.\mathbb{Z}[e^{\frac{2}{3}\pi i}])$$

$$\cap$$

$$PSU(2,1)$$

$$\cap$$

$$PSL(3)$$



- **rk=4** ex. $E_4(a,b,c,c')$, $\underline{c+c'=a+b+1}$

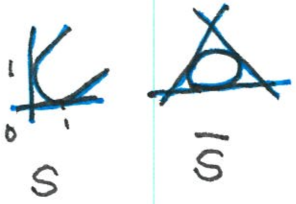
$$M=\mathbb{C}^2-S \longrightarrow \mathbb{P}^3$$

$$\cup \quad \underline{2次条件}$$

$$\underline{X=Q^2=\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1} \curvearrowleft \Gamma$$

$$\begin{cases} u_{xx}=p(x)u \\ u_{yy}=g(y)u \end{cases}$$ にreduction

Γは 1変数のテンソル積



○ 接触型3変数

未知

• rk=4 $\mathcal{E}_1(a,b,b',b'',c)$

$$\begin{tikzcd}
M=\mathbb{C}^3-S \arrow[r, "\underline{\text{contact str.}}"'] & \mathbb{P}^3 \\
 & X=\mathbb{B}^3,\mathbb{P}^3 \curvearrowleft \Gamma \arrow[u, phantom, "\cup"]
\end{tikzcd}$$

• rk=8 $\mathcal{E}_4(a,b,c,c',c'')$

$$\begin{tikzcd}
M=\mathbb{C}^3-S \arrow[r, "\underline{2\text{次条件}}"'] & \mathbb{P}^7 & \underline{c+c'+c''=a+b+1} \\
\Gamma \curvearrowright & \underline{X=\underset{tr=0}{\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^{*}}} \arrow[u, phantom, "\cup"] & \underline{\subset Q^6} \arrow[u, phantom, "\cup"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{cases} X^2u=p(x,z)u \\ Y^2u=q(x,z)u \end{cases} \text{に reduction}$$