

複素超楕円ヤコビ多様体内の
ある「実値構造」と実超楕円 αm 関数について
沼津改め 静岡研究会 —幾何，複素解析，そして数理物理—
2025年3月25日（火）～28日（金）
静岡大学

松谷茂樹

金沢大学

2025年3月26日

- ① 研究の目的
- ② 種数 1 の KdV 方程式、
- ③ 種数 1: 被覆空間 $\mathbf{am}$ 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式
- ④ 種数 2 の KdV 方程式、
- ⑤ 種数 2: 被覆空間 $\widehat{X}$ $\mathbf{am}$ 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式
- ⑥ 種数 g : 被覆空間 $\widehat{X}$ $\mathbf{am}$ 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式
- ⑦ 種数 g : $TS^g \widehat{X}$ と TJ_X
- ⑧ 集光型 MKdV 方程式と DNA の形状

- ① → 研究の目的
- ② 種数 1 の KdV 方程式、
- ③ 種数 1: 被覆空間 $\mathbf{am}$ 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式
- ④ 種数 2 の KdV 方程式、
- ⑤ 種数 2: 被覆空間 $\widehat{X}$ $\mathbf{am}$ 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式
- ⑥ 種数 g : 被覆空間 $\widehat{X}$ $\mathbf{am}$ 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式
- ⑦ 種数 g : $TS^g \widehat{X}$ と TJ_X
- ⑧ 集光型 MKdV 方程式と DNA の形状

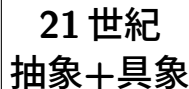
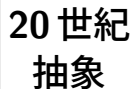
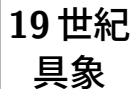
研究の目的

代数曲線の σ 関数の研究の目的：

『楕円関数（楕円曲線の Abel 関数）が明示的な表現を持つことで「理論物理，工学」の発展に寄与したように，

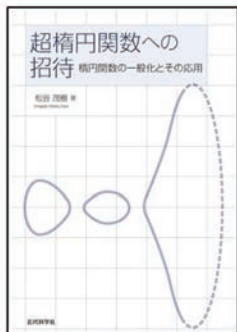
『理論物理，工学』の発展に寄与できるよう，楕円関数と同レベルの具象性を持つ代数曲線上の Abel 関数論を再構築する』

特に Euler の弾性曲線を一般化しその励起状態を超楕円関数で記述したい (1997)



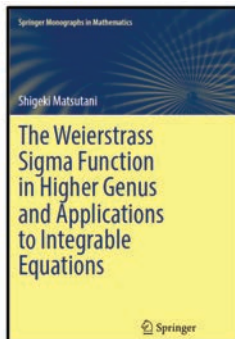
研究の目的

書籍化（近刊の予定）



2024年7月

2024.7



2025年

2025.6



2025年

2025?

研究の目的

代数曲線の σ 関数の研究の目的：

『楕円関数（楕円曲線の Abel 関数）が明示的な表現を持つことで「理論物理，工学」の発展に寄与したように，

「理論物理，工学」の発展に寄与できるよう，楕円関数と同レベルの具象性を持つ代数曲線上の Abel 関数論を再構築する』

特に Euler の弾性曲線を一般化しその励起状態を超楕円関数で記述したい (1997)

19 世紀
具象



20 世紀
抽象



21 世紀
抽象＋具象

- ① 研究の目的
- ② → 種数 1 の KdV 方程式、
- ③ 種数 1: 被覆空間 $\mathbf{am}$ 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式
- ④ 種数 2 の KdV 方程式、
- ⑤ 種数 2: 被覆空間 $\widehat{X}$ $\mathbf{am}$ 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式
- ⑥ 種数 g : 被覆空間 $\widehat{X}$ $\mathbf{am}$ 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式
- ⑦ 種数 g : $TS^g \widehat{X}$ と TJ_X
- ⑧ 集光型 MKdV 方程式と DNA の形状

種数 1 の KdV 方程式

種数 1 曲線

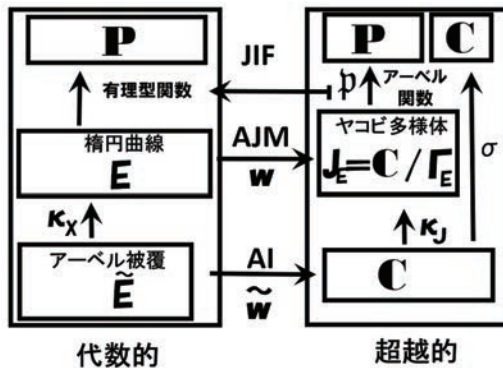
$$E := \left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} y^2 = x^3 + \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x + \lambda_0 \\ = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3) \end{array} \right\} \cup \{\infty\} \quad (1)$$

- $\hat{y} := 2y, \hat{x} := x - \lambda_2/3 \Rightarrow \hat{y}^2 = 4\hat{x}^3 + g_2\hat{x} + g_3,$
- $du := \nu^I := \frac{dx}{2y} = \frac{d\hat{x}}{\hat{y}}, \quad \nu^{II} := \frac{x dx}{2y}$
- $\kappa_E : \tilde{E} \rightarrow E : E \text{ のアーベル被覆} \quad \kappa_E : \gamma_{P,\infty} \mapsto P \in E.$
- 不完全楕円積分 $\tilde{w} : \tilde{E} \rightarrow \mathbb{C}, \int \nu^I \in \mathbb{C}$
- 周期積分 : $\omega_i := \tilde{w}(e_i, 0) = \int_{\infty}^{\gamma_{(e_i,0)}} \nu^I$
- $\Gamma_E = 2\mathbb{Z}\omega_1 + 2\mathbb{Z}\omega_3 \subset \mathbb{C}$
- $\kappa_J : \mathbb{C} \rightarrow J_E = \mathbb{C}/\Gamma_E$

種数 1 の KdV 方程式

種数 1 : 曲線とヤコビ多様体

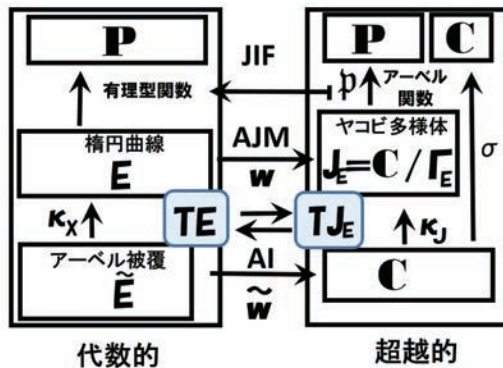
- $\wp(u) := -\frac{d^2}{du^2} \log \sigma(u), x(u) = \wp(u)$
- $du = \frac{dx}{2y}, \quad \frac{d}{du} = 2y \frac{d}{dx}, \quad \frac{d}{du} x = 2y \frac{d}{dx} x = 2y$



種数 1 の KdV 方程式

種数 1 : 曲線とヤコビ多様体

- $\wp(u) := -\frac{d^2}{du^2} \log \sigma(u), x(u) = \wp(u)$
- $du = \frac{dx}{2y}, \quad \frac{d}{du} = 2y \frac{d}{dx}, \quad \frac{d}{du} x = 2y \frac{d}{dx} x = 2y$



種数 1 の KdV 方程式

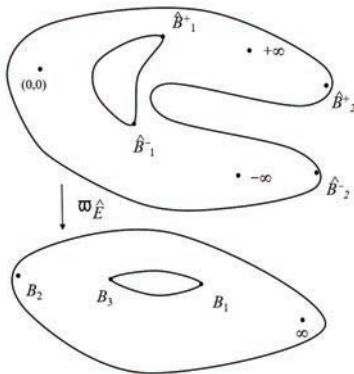
種数 1 の KdV 方程式

- $\wp(u) := -\frac{d^2}{du^2} \log \sigma(u), x(u) = \wp(u)$
- $du = \frac{dx}{2y}, \frac{d}{du} = 2y \frac{d}{dx}$
- $\frac{d}{du} x = 2y \frac{d}{dx} x = 2y$
- $\left(\frac{\wp_u(u)}{2} \right)^2 = \wp(u)^3 + \lambda_2 \wp(u)^2 + \lambda_1 \wp(u) + \lambda_0$
- $\frac{\wp_u \wp_{uu}}{2} = \wp_u (3\wp^2 + 2\lambda_2 \wp + \lambda_1)$
- **KdV 方程式**: $\wp_{uuu} - 6\wp \wp_u - 2\lambda_2 \wp_u = 0$: 微分恒等式

- ① 研究の目的
- ② 種数 1 の KdV 方程式、
- ③ → 種数 1: 被覆空間 am 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式
- ④ 種数 2 の KdV 方程式、
- ⑤ 種数 2: 被覆空間 $\widehat{X}$ am 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式
- ⑥ 種数 g : 被覆空間 $\widehat{X}$ am 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式
- ⑦ 種数 g : $TS^g \widehat{X}$ と TJ_X
- ⑧ 集光型 MKdV 方程式と DNA の形状

種数 1: 被覆空間 $\mathbb{A}^1$ 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式

種数 1 の被覆曲線



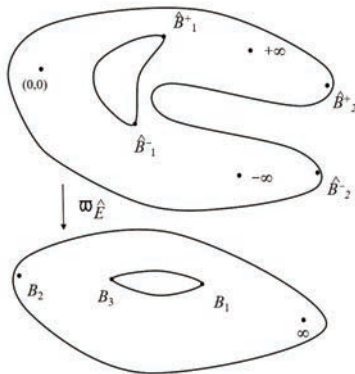
種数 1 : 被覆空間 am 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式

種数 1 の被覆曲線とヤコビの am 関数

- $w^2 := (x - e_3) \Rightarrow$ 2重被覆の特異曲線, $c_i := e_i - e_3$
 $y^2 = w^2(w^2 - c_1)(w^2 - c_2)$
- 正規化: $z = y/w \Rightarrow \hat{E}: z^2 = (w^2 - c_2)(w^2 - c_3)$
- $al_1(u) = \sqrt{x(u) - e_1} = \sqrt{\wp(u) - e_1} = \frac{e^{-\eta_1 u} \sigma(u + \omega_1)}{\sigma(u) \sigma(\omega_1)}$
- $al_2(u) = \sqrt{x(u) - e_2} = \frac{e^{-\eta_2 u} \sigma(u + \omega_2)}{\sigma(u) \sigma(\omega_2)},$
- $al_3(u) = \sqrt{x(u) - e_3} = \frac{e^{-\eta_3 u} \sigma(u + \omega_3)}{\sigma(u) \sigma(\omega_3)}$
- $sn(u) = \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{al_3(u)}, cn(u) = \frac{al_1(u)}{al_3(u)}, dn(u) = \frac{al_2(u)}{al_3(u)}$

種数 1: 被覆空間 $\mathbb{A}^1$ 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式

種数 1 の被覆曲線



種数 1: 被覆空間 am 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式

種数 1 の被覆曲線と am 関数

○ $\operatorname{sn}(u) = \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\operatorname{al}_3(u)} = \sin \operatorname{am}(u)$: **Jacobi の am 関数** $\Rightarrow$ 一般化

○ $\widetilde{\operatorname{am}} : \operatorname{al}_3(u) = \exp(i\widetilde{\operatorname{am}}(u))$, or $\varphi = \widetilde{\operatorname{am}}$,
 $x(u) - e_3 = \exp(2i\varphi(u))$, 但し $c_i := e_i - e_3$, $c_1 c_2 = 1$.

○ $w = e^{i\varphi}$, $k_1 = \frac{2i\sqrt{c_1 c_2}}{\sqrt{c_1} - \sqrt{c_2}}$ とする

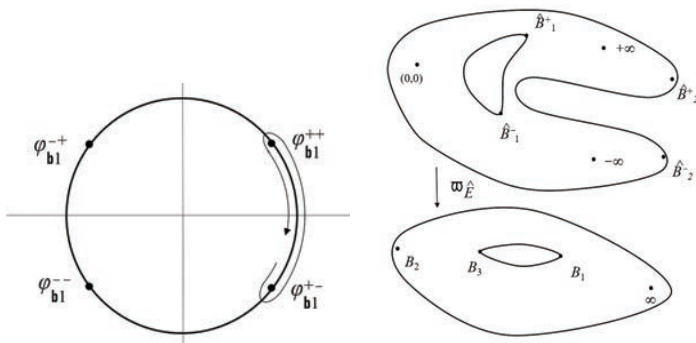
○ $(w^2 - c_1)(w^2 - c_2) = 4\frac{1}{k_1^2} e^{2i\varphi} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)$

$$\begin{aligned}(w^2 - c_1)(w^2 - c_2) &= w^2(w^2 - (c_1 + c_2) + c_1 c_2 w^{-2}) \\&= w^2 \left(e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi} - \frac{e_1 + e_2}{1} \right) \\&= 2w^2 \left(\cos(2\varphi) - \frac{c_1 + c_2}{2} \right) \\&= 4w^2 \frac{1}{k_1^2} (1 - k_1^2 \sin^2 \varphi),\end{aligned}$$

種数 1: 被覆空間 $\mathfrak{am}$ 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式

種数 1 の被覆曲線

- $z^2 = 4 \frac{1}{k_1^2} e^{2i\varphi} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)$, 但し $\mathfrak{c}_i := e_i - e_3$, $\mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}_2 = 1$
- $du = \frac{dx}{2y} = \frac{dw}{z} = \frac{ik_1 d\varphi}{2\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$ となる. ($\widetilde{\mathfrak{am}}(u)$)



種数 1 : 被覆空間 am 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式

種数 1 の被覆曲線とヤコビの am 関数

- $w^2 := (x - e_3) \Rightarrow$ 2重被覆の特異曲線, $c_i := e_i - e_3$
 $y^2 = w^2(w^2 - c_1)(w^2 - c_2)$
- 正規化: $z = y/w \Rightarrow \hat{E}: z^2 = (w^2 - c_2)(w^2 - c_3)$
- $al_1(u) = \sqrt{x(u) - e_1} = \sqrt{\wp(u) - e_1} = \frac{e^{-\eta_1 u} \sigma(u + \omega_1)}{\sigma(u) \sigma(\omega_1)}$
- $al_2(u) = \sqrt{x(u) - e_2} = \frac{e^{-\eta_2 u} \sigma(u + \omega_2)}{\sigma(u) \sigma(\omega_2)},$
- $al_3(u) = \sqrt{x(u) - e_3} = \frac{e^{-\eta_3 u} \sigma(u + \omega_3)}{\sigma(u) \sigma(\omega_3)}$
- $sn(u) = \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{al_3(u)}, cn(u) = \frac{al_1(u)}{al_3(u)}, dn(u) = \frac{al_2(u)}{al_3(u)}$

種数 1: 被覆空間 am 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式

種数 1 の被覆曲線と am 関数

- $$\frac{d}{du} \log \operatorname{al}_3(u) = \frac{1}{2} \frac{d\wp(u)/du}{\wp(u) - e_3} = \frac{y(u)}{x(u) - e_3} = \frac{\operatorname{al}_1 \operatorname{al}_2}{\operatorname{al}_3}$$
$$= [\zeta(u + \omega_3) - \zeta(u) - \eta_3].$$
- $$\frac{d}{du} \operatorname{al}_3 = 2y \frac{d}{dx} \sqrt{x - e_3} = \frac{y}{\sqrt{x - e_3}} = \operatorname{al}_1 \operatorname{al}_2$$
- **MKdV 方程式:** $\varphi(u) := \widetilde{\operatorname{am}}(u) := (\log \operatorname{al}_3(u))/i$, $\operatorname{al}_3(u) = e^{i\widetilde{\operatorname{am}}(u)}$
: $4(\lambda_2 + 3e_3)\varphi_u + \varphi_u^3 + \varphi_{uuu} = 0$
- **sine-Gordon 方程式:**
$$\frac{d^2}{du^2} \log \operatorname{al}_3 = (\operatorname{al}_3(u))^2 - \frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{(\operatorname{al}_3(u))^2}$$
$$\frac{d^2}{du^2} \varphi = 2 \sin 2\varphi$$
- **MKdV 方程式, sine-Gordon 方程式は楕円関数の起源である弾性曲線の方程式として発見された Euler 1744, Lagrange 1770, Gauss 1800 (Jacob Bernoulli 1694.)**

- ① 研究の目的
- ② 種数 1 の KdV 方程式、
- ③ 種数 1: 被覆空間 am 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式
- ④ → 種数 2 の KdV 方程式、
- ⑤ 種数 2: 被覆空間 $\widehat{X}$ am 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式
- ⑥ 種数 g : 被覆空間 $\widehat{X}$ am 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式
- ⑦ 種数 g : $TS^g \widehat{X}$ と TJ_X
- ⑧ 集光型 MKdV 方程式と DNA の形状

種数 2 の KdV 方程式

種数 2 の曲線

$$X := \left\{ (x, y) \mid \begin{aligned} y^2 &= f(x) \\ &= (x - b_0)(x - b_1) \cdots (x - b_4) \\ &= x^5 + \lambda_4 x^4 + \cdots + \lambda_1 x + \lambda_0 \\ &= (x - b_1)(x^4 + \lambda'_3 x^3 + \cdots + \lambda'_0) \end{aligned} \right\} \cup \{\infty\}$$

$$\bigcirc \quad \nu^I := \begin{pmatrix} \nu_1^I \\ \nu_2^I \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{dx}{2y} \\ \frac{x dx}{2y} \end{pmatrix}, \quad \nu_j^I := \frac{x^{j-1} dx}{2y}$$

$$\bigcirc \quad \kappa_X : \tilde{X} \rightarrow X : X \text{ のアーベル被覆} \quad \kappa_X : \gamma_{P, \infty} \mapsto P \in X.$$

$$\bigcirc \quad \text{アーベル積分} : \tilde{w} : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad \tilde{w}(\gamma) := \int_{\gamma} \nu^I \in \mathbb{C}^2,$$

$$\bigcirc \quad \text{アーベル積分} : \tilde{w} : S^2 \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}^2, \\ u := \tilde{w}(\gamma_1, \gamma_2) := \tilde{w}(\gamma_1) + \tilde{w}(\gamma_2)$$

種数 2 の KdV 方程式

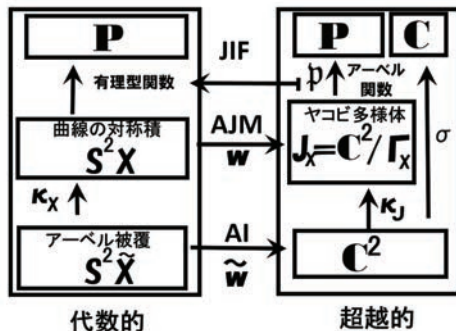
種数 2 の曲線

- 周期積分： $\omega_i := \tilde{w}(b_i, 0) = \int_{\infty}^{(b_i, 0)} \nu^I$
- $\omega' := (\omega_2, \omega_4), \quad \omega'' := (\omega_2 - \omega_1, \omega_4 - \omega_3)$
- $\Gamma_X := \langle 2\omega', 2\omega'' \rangle_{\mathbb{Z}}$
- $\kappa_J : \mathbb{C}^2 \rightarrow J_X = \mathbb{C}^2 / \Gamma_X$
- アーベル・ヤコビ写像： $w : S^2 X \rightarrow J_X$,
 $w(P_1, P_2) := \int_{\infty}^{P_1} \nu^I + \int_{\infty}^{P_2} \nu^I \in J_X$,
- $\varpi_X : X \rightarrow \mathbb{P} := \mathbb{P}^1, \varpi_X(P_a = (x_a, y_a)) = x_a$.

種数2のKdV方程式

種数2：曲線とヤコビ多様体

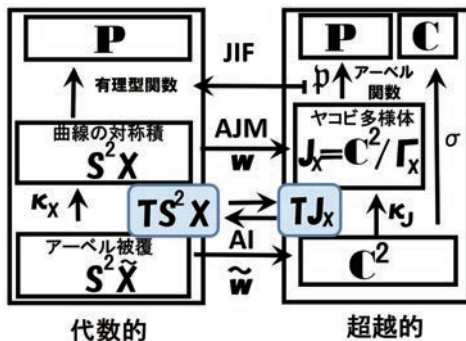
- $\wp_{ij}(u) := -\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} \log \sigma(u)$, ヤコビの逆問題,
- $\kappa_X(\gamma_a) = (x_a, y_a)$ かつ $u = \tilde{w}(\gamma_1, \gamma_2)$ に対して
 $x_1 + x_2 = \wp_{22}(u)$, $x_1 x_2 = \wp_{21}(u)$, $\frac{f_\Omega(x_1, x_2) - 2y_1 y_2}{(x_1 - x_2)^2} = \wp_{11}$



種数2のKdV方程式

種数2：曲線とヤコビ多様体

- $\wp_{ij}(u) := -\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} \log \sigma(u)$, ヤコビの逆問題
- $\kappa_X(\gamma_a) = (x_a, y_a)$ かつ $u = \tilde{w}(\gamma_1, \gamma_2)$ に対して
 $x_1 + x_2 = \wp_{22}(u)$, $x_1 x_2 = \wp_{21}(u)$, $\frac{f_\Omega(x_1, x_2) - 2y_1 y_2}{(x_1 - x_2)^2} = \wp_{11}$



種数 2 の KdV 方程式

種数 2 の KdV 方程式

Theorem

種数 2 の $\wp$ 関数は次を満たす. ($\wp_{22}(u) = x_1 + x_2$, $\wp_{21}(u) = x_1 x_2$)

$$\wp_{2222} = 6\wp_{22}^2 + 4\wp_{21} + 4\lambda_4\wp_{22} + 2\lambda_3 \quad (2)$$

証明:

- $\begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2y_1 & 1/2y_2 \\ x_1/2y_1 & x_2/2y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix}$, この行列を M とする
- $\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix} = \frac{4y_1y_2}{(x_2 - x_1)} \begin{pmatrix} x_2/2y_2 & -1/2y_2 \\ -x_1/2y_1 & 1/2y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \end{pmatrix} \quad (M^{-1})$
- $M = (\partial u_i / \partial x_j)$ という事実に着目する.
- $\begin{pmatrix} \partial_{u_1} \\ \partial_{u_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{pmatrix} 2x_2y_1 & -2x_1y_2 \\ -2y_1 & 2y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \end{pmatrix} \quad ({}^tM^{-1})$

種数 2 の KdV 方程式

種数 2 の KdV 方程式 2, $\partial_{u_2} \wp_{22}(u)$, $\partial_{u_2}^2 \wp_{22}(u)$

$$\begin{aligned} \bigcirc \quad \frac{\partial}{\partial u_2}(x_1 + x_2) &= \left(\frac{2y_1}{x_1 - x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{2y_2}{x_2 - x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) (x_1 + x_2) \\ &= \frac{2y_1}{x_1 - x_2} - \frac{2y_2}{x_1 - x_2} \end{aligned}$$

$$\bigcirc \quad y_a^2 = f(x_a) \text{ より } 2y_a dy_a = f'(x_a) dx_a \text{ に注意する}$$

$$\bigcirc \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{2y_1}{x_1 - x_2} - \frac{2y_2}{x_1 - x_2} \right] = \frac{-2(y_1 + y_2)}{(x_1 - x_2)^2} + \frac{2f'(x_1)}{2(x_1 - x_2)y_1}$$

$$\begin{aligned} \bigcirc \quad \frac{\partial^2}{\partial u_2^2}(x_1 + x_2) &= \frac{2y_1}{x_1 - x_2} \left[\frac{-2(y_1 + y_2)}{(x_1 - x_2)^2} + \frac{2f'(x_1)}{2(x_1 - x_2)y_1} \right] + (1 \leftrightarrow 2) \\ &= \frac{-4f(x_1)}{(x_1 - x_2)^3} + \frac{2f'(x_1)}{(x_1 - x_2)^2} + \frac{-4f(x_2)}{(x_1 - x_2)^3} + \frac{2f'(x_2)}{(x_1 - x_2)^2} \\ &= \frac{-2}{(x_1 - x_2)^2} I(x_1, x_2) \end{aligned}$$

$$\bigcirc \quad I := 2 \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} - (f'(x_1) + f'(x_2))$$

種数 2 の KdV 方程式

種数 2 の KdV 方程式 3

○ $I = (x_1 - x_2)^2 [-3(x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2 - 2\lambda_4(x_1 + x_2) + \lambda_3]$

○ いままでのまとめ

$$\frac{\partial^2}{\partial u_2^2}(x_1 + x_2) = 6(x_1 + x_2)^2 + 4x_1x_2 + 4\lambda_4(x_1 + x_2) + 2\lambda_3$$

○ $x_1 + x_2 = \wp_{22}(u)$, $x_1x_2 = \wp_{21}(u)$ に注意すると KdV 方程式が得られた.

種数 2 の KdV 方程式 3

$$\wp_{2222} = 6\wp_{22}^2 + 4\wp_{21} + 4\lambda_4\wp_{22} + 2\lambda_3$$

は S^2X 上で微分恒等式として成立する.

- ① 研究の目的
- ② 種数 1 の KdV 方程式、
- ③ 種数 1: 被覆空間 am 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式
- ④ 種数 2 の KdV 方程式、
- ⑤ $\rightarrow$ 種数 2: 被覆空間 $\hat{X}$ am 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式
- ⑥ 種数 g : 被覆空間 $\hat{X}$ am 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式
- ⑦ 種数 g : $TS^g \hat{X}$ と TJ_X
- ⑧ 集光型 MKdV 方程式と DNA の形状

種数 2 の MKdV 方程式

背景と目標

- Euler はエネルギー $\int (\partial\phi(s))^2 ds$ 最小値としての弾性曲線方程式

$$(a\partial_s)\phi + \left(\frac{1}{2}\partial\phi\right)^3 + \partial_s^3\phi = 0$$

を陰に導出し、この楕円積分を実行することで弾性曲線の形状の実現と、その分類（モデュライの分類）を行った．

- 弾性曲線の励起状態の等エネルギー面は実 MKdV（実変形 KdV）方程式に従う

$$(\partial_t + a\partial_s)\phi + \left(\frac{1}{2}\partial\phi\right)^3 + \partial_s^3\phi = 0$$

(t, s, ϕ) はすべて実数値)

- 目標：実 MKdV 方程式の超楕円関数解 を 複素超楕曲線の知見により得たい

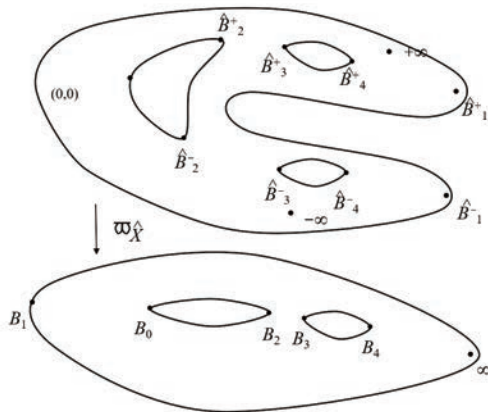
種数 2 の MKdV 方程式

種数 2 の被覆曲線

- $w^2 := (x - b_0) \Rightarrow$
 $y^2 = w^2(w^2 - c_1) \cdots (w^2 - c_4), c_i = b_i - b_0$
 - $z = yx \Rightarrow$
 $\hat{X} : z^2 = (w^2 - c_1) \cdots (w^2 - c_4)$
 - $\text{al}_0(u) = w_1 w_2 = \sqrt{(x_1 - b_0)(x_2 - b_0)} = \frac{e^{-\eta_1 u} \sigma(u + \omega_1)}{\sigma(u) \sigma(\omega_1)}$
- $$((w_1, z_1), (w_2, z_2)) \in S^2 \hat{X} \quad (((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in S^2 X)$$

種数 2 の MKdV 方程式

種数 2 の被覆曲線



種数 2 の MKdV 方程式

種数 2 の MKdV 方程式解

Theorem

$(x_a, y_a)_{a=1,2} \in S^2 X$, $w_a^2 = (x_a - b_0) = \exp(2i\varphi_a)$ ($a = 1, 2$)

$\phi := \frac{2}{i} \log \text{al}_0(u) = 2(\varphi_1 + \varphi_2)$, (超楕円 $\text{am}(u) = \phi(u)/2$ 関数) は複素数体上の MKdV 方程式

$$\frac{\partial^3}{\partial u_2^3} \phi + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u_2} \phi \right)^3 = 4 \frac{\partial}{\partial u_1} \phi - 2(\lambda_4 + 3b_1) \frac{\partial}{\partial u_2} \phi$$

$b_0 = 0$ かつ $\prod_i^4 b_i = 1$ のとき, *sine-Gordon* 方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial u_2 \partial u_1} \phi = 2 \sin \phi$$

を満たす

- ① 研究の目的
- ② 種数 1 の KdV 方程式、
- ③ 種数 1: 被覆空間 am 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式
- ④ 種数 2 の KdV 方程式、
- ⑤ 種数 2: 被覆空間 $\hat{X}$ am 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式
- ⑥ $\rightarrow$ 種数 g : 被覆空間 $\hat{X}$ am 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式
- ⑦ 種数 g : $TS^g \hat{X}$ と TJ_X
- ⑧ 集光型 MKdV 方程式と DNA の形状

種数 g の MKdV 方程式, sine-Gordon 方程式

種数 g の MKdV 方程式解

$$X := \left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} y^2 = (-1)^g (x - b_0)(x - b_1) \cdots (x - b_{2g}) \\ = (-1)^g (x^{2g+1} + \lambda_{2g} x^{2g} + \cdots + \lambda_1 x + \lambda_0) \end{array} \right\} \cup \{\infty\}$$

$$\bigcirc \quad \nu^I := \begin{pmatrix} \nu_1^I \\ \vdots \\ \nu_g^I \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{dx}{2y} \\ \vdots \\ \frac{x^{g-1} dx}{2y} \end{pmatrix}, \quad \nu_i^I = \frac{x^{i-1} dx}{2y}$$

$$\bigcirc \quad \kappa_X : \tilde{X} \rightarrow X : X \text{ のアーベル被覆} \quad \kappa_X : \gamma_{P,\infty} \mapsto P \in X.$$

$$\bigcirc \quad \text{アーベル積分} : \tilde{w} : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}^g, \quad \tilde{w}(\gamma) := \int_{\gamma} \nu^I \in \mathbb{C}^2,$$

$$\bigcirc \quad \text{アーベル積分} : \tilde{w} : S^g \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}^g, \\ u := \tilde{w}(\gamma_1, \dots, \gamma_g) := \tilde{w}(\gamma_1) + \cdots + \tilde{w}(\gamma_g)$$

種数 g の MKdV 方程式, sine-Gordon 方程式

種数 g の MKdV 方程式解

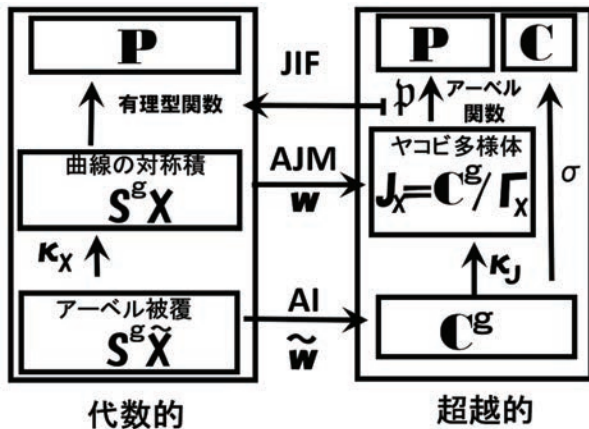
$$\bigcirc \begin{bmatrix} du_1 \\ \vdots \\ du_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{g-1} & \cdots & x_g^{g-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2y_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{2y_g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_g \end{bmatrix},$$

この行列を M とする

$$\bigcirc \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_g \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} du_1 \\ \vdots \\ du_g \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \partial_{u_1} \\ \vdots \\ \partial_{u_g} \end{bmatrix} = {}^t M^{-1} \begin{bmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_g} \end{bmatrix}$$

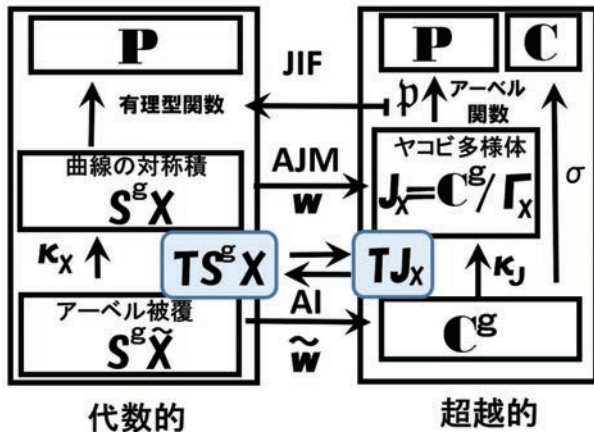
種数 g の MKdV 方程式

種数 g : 曲線とヤコビ多様体



種数 g の MKdV 方程式

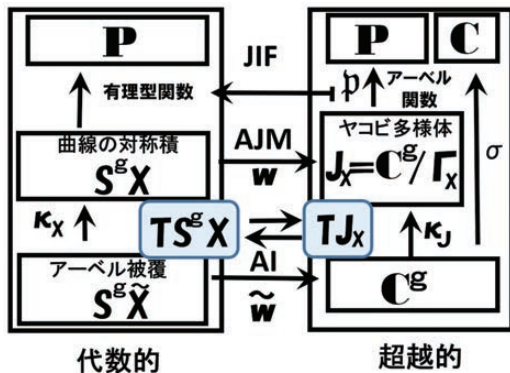
種数 g : 曲線とヤコビ多様体



種数 g の MKdV 方程式

種数 g : 曲線とヤコビ多様体

$$\circ \begin{bmatrix} du_1 \\ \vdots \\ du_g \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_g \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_g \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} du_1 \\ \vdots \\ du_g \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \partial_{u_1} \\ \vdots \\ \partial_{u_g} \end{bmatrix} = {}^t M^{-1} \begin{bmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_g} \end{bmatrix}$$



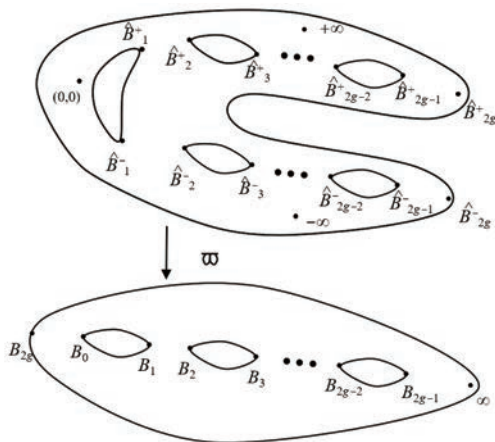
種数 g の MKdV 方程式

種数 g の被覆曲線

- $w^2 := (x - b_0) \Rightarrow$
 $y^2 = w^2(w^2 - c_1) \cdots (w^2 - c_{2g}), c_i = b_i - b_0$
- $z = yx \Rightarrow$
 $\hat{X} : z^2 = (w^2 - c_1) \cdots (w^2 - c_{2g}),$
- $\text{al}_0(u) = w_1 \cdots w_g = \sqrt{(x_1 - b_0) \cdots (x_g - b_0)} = \frac{e^{-\eta_1 u} \sigma(u + \omega_1)}{\sigma(u) \sigma(\omega_1)}$
 $((w_1, z_1), \dots, (w_g, z_g)) \in S^g \hat{X} \quad (((x_1, y_1), \dots, (x_g, y_g)) \in S^g X)$

種数 g の MKdV 方程式

種数 g の被覆曲線



種数 g の MKdV 方程式, sine-Gordon 方程式

種数 g の MKdV 方程式解

Theorem

$$\text{al}_0(u) = \sqrt{(x_1 - b_0) \cdots (x_g - b_0)} = \exp(i\phi/2),$$

$\phi := \frac{2}{i} \log \text{al}_0(u)$ (超楕円 $\text{am}(u) = \phi(u)/2$ 関数) は複素数体上の MKdV, sine-Gordon 方程式を恒等式として満たす:

$$\frac{\partial^3}{\partial u_g^3} \phi + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u_g} \phi \right)^3 = 4 \frac{\partial}{\partial u_{g-1}} \phi - 2(\lambda_{2g} + 3b_0) \frac{\partial}{\partial u_g} \phi$$

$$b_0 = 0 \text{ かつ } \prod_i^g b_i = 1 \text{ のとき, } \frac{\partial^2}{\partial u_g \partial u_1} \phi = 2 \sin \phi$$

種数 g の MKdV 方程式, sine-Gordon 方程式

種数 g の MKdV 方程式解の実値性

実解析的には $\phi = \phi_r + i\phi_i$, $u_a = u_{a,r} + iu_{a,i}$ により

Theorem

$$\text{al}_0(u) = \sqrt{(x_1 - b_0) \cdots (x_g - b_0)} = \exp(i\phi/2),$$

ϕ_r (実超楕円 $\text{am}(u) = \phi_r(u)/2$ 関数はゲージ場付き MKdV 方程式を満たす

$$\frac{\partial^3 \phi_r}{\partial u_{g,r}^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial u_{g,r}} \right)^3 = 4 \frac{\partial}{\partial u_{g-1,r}} \phi_r - 2(\lambda_{2g} + 3b_0 + \frac{3}{8} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial u_{g,r}} \right)^2) \frac{\partial \phi_r}{\partial u_{g,r}}$$

$b_0 = 0$ かつ $\prod_i^g b_i = 1$ のとき, sine-Gordon 方程式も満たす

$$\left[\frac{\partial}{\partial u_{g,rr}} - i \frac{\partial}{\partial u_{g,ri}} \right] \left[\frac{\partial}{\partial u_{1,rr}} - i \frac{\partial}{\partial u_{1,ri}} \right] (\phi_r + i\phi_i) = 8 \sin(\phi_r + i\phi_i)$$

目標: $\phi = \phi_r$ の方程式として実値 $u_{a,r}$ で構成したい!

- ① 研究の目的
- ② 種数 1 の KdV 方程式、
- ③ 種数 1: 被覆空間 $\mathbf{am}$ 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式
- ④ 種数 2 の KdV 方程式、
- ⑤ 種数 2: 被覆空間 $\hat{X}$ $\mathbf{am}$ 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式
- ⑥ 種数 g : 被覆空間 $\hat{X}$ $\mathbf{am}$ 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式
- ⑦ $\rightarrow$ 種数 g : $TS^g \hat{X}$ と TJ_X
- ⑧ 集光型 MKdV 方程式と DNA の形状

種数 g の MKdV 方程式, sine-Gordon 方程式

種数 g の MKdV 方程式解

問題：超楕円 am 関数 $\phi = \phi_r \in \mathbb{R}$ かつ、その Abel 積分の像 $\left\{ \begin{pmatrix} u_{g-1} \\ u_g \end{pmatrix} \right\}$ が $\mathbb{R}^2$ となるように構成できるか？

$((w_1, z_1), \dots, (w_g, z_g)) \in S^g \hat{X}$ に対し、 $\text{al}_0(u) = w_1 \cdots w_g = e^{i\phi}$
また、 $w_a = e^{i\varphi_a}$ とすると $\phi = (\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_g)$ より

問題： $(w_1, \dots, w_g) \in \varpi_x S^g \hat{X}$ に対し、 $w_a = e^{i\varphi_a} \in S^1 \subset X$, i.e.
 $\varphi_a \in \mathbb{R}$ とその Abel 積分の像 $\left\{ \begin{pmatrix} u_{g-1} \\ u_g \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^g = \kappa_J^{-1} J_X$
とを同時に成立させることは可能か？

種数 g の MKdV 方程式, sine-Gordon 方程式

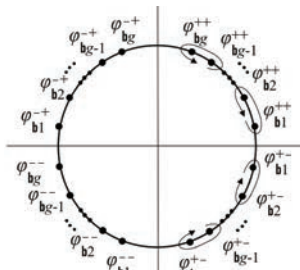
種数 g の MKdV 方程式解 S^1 上の分岐点

$\phi = \phi_r + i\phi_i$, $u_a = u_{a,r} + iu_{a,i}$ により

問題: $(w_1, \dots, w_g) \in \varpi_X S^g \hat{X}$ に対し, $w_a = e^{i\varphi_a} \in S^1 \subset X$, i.e. $\varphi_a \in \mathbb{R}$ とその Abel 積分の像 $\left\{ \begin{pmatrix} u_{g-1} \\ u_g \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^g = \kappa_J^{-1} J_X$ とを同時に成立させる

ことは可能か?

$\{\pm c_1^{1/2}, \pm c_2^{1/2}, \dots, \pm c_{2g}^{1/2}\}$ を S^1 上に配置し $c_{2n-1}^{1/2} c_{2n}^{1/2} = 1$ とする
 $\{e^{i\phi_{ba}^{\pm, \pm}}\}_{a=1, \dots, g}$



種数 g の MKdV 方程式, sine-Gordon 方程式

種数 g の角表示

問題： $(w_1, \dots, w_g) \in \varpi_x S^g \hat{X}$ に対し, $w_a = e^{i\varphi_a} \in S^1 \subset X$, i.e. $\varphi_a \in \mathbb{R}$ とその Abel 積分の像 $\left\{ \begin{pmatrix} u_{g-1} \\ u_g \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^g = \kappa_J^{-1} J_X$ とを同時に成立させることは可能か？

$\{\pm c_1^{1/2}, \pm c_2^{1/2}, \dots, \pm c_{2n}^{1/2}\}$ を S^1 上に配置し $c_{2n-1}^{1/2} c_{2n}^{1/2} = 1$ とする

Lemma

$e^{2i\varphi} := (x - b_0)$ により y は以下のようになる

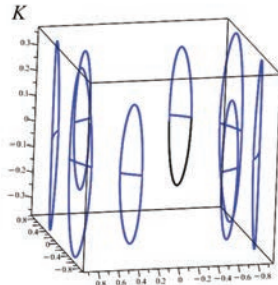
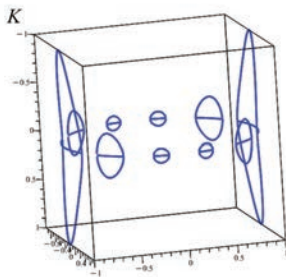
$$\begin{aligned} y^2 &= (-4)^g \frac{4e^{(2g+2)i\varphi}}{\prod_i (k_i^2)} \prod_{a=1}^g (1 - k_a^2 \sin^2 \varphi), \quad k_a := \frac{2i\sqrt{e_{2a-1}e_{2a}}}{\sqrt{e_{2a-1}} - \sqrt{e_{2a}}}, \\ &= (-4)^g 4e^{(2g+2)i\varphi} K^2, \quad K^2 = \prod_{a=1}^g \frac{(1 - k_a^2 \sin^2 \varphi)}{\prod_i (k_i^2)}, \end{aligned}$$

種数 g の MKdV 方程式, sine-Gordon 方程式

種数 g の角表示 実超楕円曲線

$(e^{i\phi_r}, 0), (e^{i\phi_r}, K) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ の表示
 $\{(\phi, K)\} \subset \mathbb{R}^2$, として表現できる.

(左: 奇 g と右: 偶 g): $\Rightarrow Z :=$



種数 g の MKdV 方程式, sine-Gordon 方程式

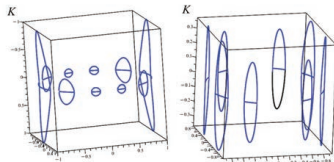
種数 g の角表示 実超楕円曲線

$Z := \{(\varphi, K)\} \subset \mathbb{R}^2$ に対して経路空間 $\tilde{Z} := \kappa_{\hat{X}}^{-1} Z$ と置く

問題: $(w_1, \dots, w_g) \in \varpi_X S^g \hat{X}$ に対し, $w_a = e^{i\varphi_a} \in S^1 \subset X$, i.e. $\varphi_a \in \mathbb{R}$ とその Abel 積分の像 $\left\{ \begin{pmatrix} u_{g-1} \\ u_g \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^g = \kappa_J^{-1} J_X$ とを同時に成立させることは可能か?

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} u_{g-1,r} \\ u_{g,r} \end{pmatrix} \right\} : S^g \tilde{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$ が構成できるか? i.e., 各点で
$$\begin{pmatrix} d\varphi_{1,r} \\ \vdots \\ d\varphi_{g,r} \end{pmatrix} =$$

$Adu_{g,r} + Bdu_{g-1,r}$ (A, B 実) を成立するか?



種数 g の MKdV 方程式, sine-Gordon 方程式

種数 g の MKdV 方程式解

○ $b_0 = -1$ とする. $d\varphi_a = \frac{dx_a}{2i(x_a - 1)}$ より

$$\begin{bmatrix} du_1 \\ \vdots \\ du_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{g-1} & \cdots & x_g^{g-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2i(x_1-1)y_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{2i(x_g-1)y_g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varphi_1 \\ \vdots \\ d\varphi_g \end{bmatrix},$$

この行列を $\mathcal{M}$ とする

$$x_a^\ell = (e^{2i\varphi_a} - 1)^\ell = (e^{i\varphi_a})^\ell (2i \sin \varphi_a)^\ell$$

$$\begin{bmatrix} d\varphi_1 \\ \vdots \\ d\varphi_g \end{bmatrix} = \mathcal{M}^{-1} \begin{bmatrix} du_1 \\ \vdots \\ du_g \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \partial_{u_1} \\ \vdots \\ \partial_{u_g} \end{bmatrix} = {}^t\mathcal{M}^{-1} \begin{bmatrix} \partial_{\varphi_1} \\ \vdots \\ \partial_{\varphi_g} \end{bmatrix}$$

種数 g の MKdV 方程式, sine-Gordon 方程式

種数 g の角表示のヤコビ行列

$$\bigcirc \mathcal{M}_{ij} = \frac{(i)^{(g-i)} e^{-(g-i-1)i\varphi_j} \sin^{i-1}(\varphi_j)}{2^{g-i-1} K_j}$$

$\bigcirc c_j := \cos(\varphi_j), s_j := i \sin(\varphi_j)$ とすると

$$\bigcirc \mathcal{M} = [\mathcal{M}_{ij}] = [i^{-g+1} (c_j - s_j)^{g-i-1} (2s_j)^{i-1} / K_j]$$

$$= \frac{i^{1-g}}{2^{g-1}} \begin{bmatrix} (c_1 - s_1)^{g-1} & \cdots & (c_g - s_g)^{g-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (2s_1)^{g-1} & \cdots & (2s_g)^{g-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & & \\ & \ddots & \\ & & K_g \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\bigcirc \mathcal{M} = \mathcal{W} \mathcal{K}^{-1}, \mathcal{W} := [(c_j - s_j)^{g-i} (2s_j)^i]$$

$\mathcal{W} := [(c_j - s_j)^{g-i} (2s_j)^{i-1}]$ は本質的には Vandermonde 行列に過ぎない

$\Rightarrow \mathcal{M}^{-1}$ は具体的に計算可能

種数 g の MKdV 方程式, sine-Gordon 方程式

種数 g の角表示のヤコビ行列

$\mathcal{W} := [\mathcal{W}_{ij}] = [(2\mathfrak{s}_j)^{i-1}(\mathfrak{c}_j - \mathfrak{s}_j)^{g-i}]$ の逆行列は

$$\prod_{i=1, \neq j}^n ((\mathfrak{c}_i - \mathfrak{s}_i)x - 2\mathfrak{s}_i) = \varepsilon_{j,n-1}x^{n-1} + \varepsilon_{j,n-2}x^{n-2} + \cdots + \varepsilon_{j,1}x + \varepsilon_{j,0}.$$

とすると

$$\mathcal{U} := [\mathcal{U}_{ij}] = [\varepsilon_{i,j}] =: [\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{g-1}]$$

により得られる. i.e.,

$$\mathcal{U}\mathcal{W} = \left[\prod_{\ell \neq i} (\mathfrak{s}_\ell \mathfrak{c}_i - \mathfrak{s}_i \mathfrak{c}_\ell) \right] \delta_{ij}, \quad \text{対角行列}$$

種数 g の MKdV 方程式, sine-Gordon 方程式

種数 g $\mathcal{M}^{-1}$ について

Lemma

- $\mathcal{W}$ の成分 ε_{ij} は $\mathbb{Q}[\mathfrak{s}_1, \dots, \mathfrak{s}_g, \mathfrak{c}_1, \dots, \mathfrak{c}_g]/(\mathfrak{s}_i, \mathfrak{c}_i)$ の $(g-1)$ 次の同次対称多項式である. ($\varphi_i \in \mathbb{R}$ の際, $\mathfrak{s}_i \in i\mathbb{R}$, $\mathfrak{c}_i \in \mathbb{R}$)
- $\mathfrak{e}_{1,k}$ を $(g-1)$ 次の同次対称多項式で, $\mathfrak{c}$ に関して k 次同次多項式とする. e.g.,
 - $\mathfrak{e}_{1,0} = \mathfrak{s}_2 \cdots \mathfrak{s}_g,$
 - $\mathfrak{e}_{1,1} = \mathfrak{c}_2 \mathfrak{s}_3 \cdots \mathfrak{s}_g + \mathfrak{s}_2 \mathfrak{c}_3 \mathfrak{s}_4 \cdots \mathfrak{s}_g + \cdots + \mathfrak{s}_2 \cdots \mathfrak{s}_{g-1} \mathfrak{c}_g,$
 - $\dots,$
 - $\mathfrak{e}_{1,g-1} = \mathfrak{c}_2 \cdots \mathfrak{c}_g,$
- $\varphi_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, g$) に対して,
 - $g-1-k$ が奇数のとき $\mathfrak{e}_{1,k} \in i\mathbb{R}$
 - $g-1-k$ が偶数のとき $\mathfrak{e}_{1,k} \in \mathbb{R}$
- $\varepsilon_{1,j}$ は $\mathbb{Q}$ 上 $\mathfrak{e}_{1,i}$ の線形結合で記述される.

種数 g の MKdV 方程式, sine-Gordon 方程式

種数 g $\mathcal{M}^{-1}$ について

Lemma

○ W の成分 ε_{ij} は $\mathbb{Q}[s_1, \dots, s_g, c_1, \dots, c_g]/(s_i, c_i)$ の $(g-1)$ 次の同次対称多項式である. ($\varphi_i \in \mathbb{R}$ の際, $s_i \in i\mathbb{R}$, $c_i \in \mathbb{R}$)

○ $e_{1,k}$ を $(g-1)$ 次の同次対称多項式で, c に関して k 次同次多項式とする. e.g.,

$$e_{1,0} = s_2 \cdots s_g,$$

$$e_{1,1} = c_2 s_3 \cdots s_g + s_2 c_3 s_4 \cdots s_g + \cdots + s_2 \cdots s_{g-1} c_g,$$

...

$$e_{1,g-1} = c_2 \cdots c_g,$$

○ 同様に $e_{i,k}$ 定義する

$$\mathcal{E} := (e_{ij}) \text{ により, } \mathcal{U} = \mathcal{E} \mathcal{A}, \quad \mathcal{A} \in \text{Mat}_{\mathbb{Q}[i]}(g).$$

種数 g の MKdV 方程式, sine-Gordon 方程式

種数 g $\mathcal{M}^{-1}$ について

$\mathcal{U} := [\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{g-1}]$ に関して

○奇数 g の場合:

$$\mathcal{V} := [\Re \varepsilon_0, \Im \varepsilon_2, \dots, \Im \varepsilon_{2\ell}, \Re \varepsilon_{2\ell}, \dots, \Im \varepsilon_{g-1}, \Re \varepsilon_{g-1}]$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{V} \mathcal{B}, \mathcal{B} \in \text{Mat}_{\mathbb{Q}[\mathbf{i}]}(g)$$

○偶数 g の場合:

$$\mathcal{V} := [\Im \varepsilon_1, \Re \varepsilon_1, \dots, \Im \varepsilon_{2\ell-1}, \Re \varepsilon_{2\ell-1}, \dots, \Im \varepsilon_{g-1}, \Re \varepsilon_{g-1}]$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{V} \mathcal{B}, \mathcal{B} \in \text{Mat}_{\mathbb{Q}[\mathbf{i}]}(g)$$

$$\text{○ } \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{B}}^{[n-3, n-3]} & \tilde{\mathcal{B}}^{[n-3], 1} & \tilde{\mathcal{B}}^{[n-3], 2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\mathbf{i} & \mathbf{i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{B}}^{[n-3], 2} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{b}_{g-4} \\ \mathbf{i} \mathbf{b}_{g-3} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathcal{B}}^{[n-3, n-3]} \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}((n-3) \times (n-3)),$$

$$\tilde{\mathcal{B}}^{[n-3], 1}, \tilde{\mathcal{B}}^{[n-3], 2} \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}((n-3) \times 1).$$

種数 g の MKdV 方程式, sine-Gordon 方程式

種数 g $\mathcal{M}^{-1}$ について

奇数 g の場合, $\mathcal{V}$ を次で定義する:

$$\begin{bmatrix} \Re \varepsilon_{1,0} & \Im \varepsilon_{1,2} & \cdots & \Im \varepsilon_{1,2\ell} & \Re \varepsilon_{1,2\ell} & \cdots & \Im \varepsilon_{1,g-1} & \Re \varepsilon_{1,g-1} \\ \Re \varepsilon_{2,0} & \Im \varepsilon_{2,2} & \cdots & \Im \varepsilon_{2,2\ell} & \Re \varepsilon_{2,2\ell} & \cdots & \Im \varepsilon_{2,g-1} & \Re \varepsilon_{2,g-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Re \varepsilon_{g-1,0} & \Im \varepsilon_{g-1,2} & \cdots & \Im \varepsilon_{g-1,2\ell} & \Re \varepsilon_{g-1,2\ell} & \cdots & \Im \varepsilon_{g-1,g-1} & \Re \varepsilon_{g-1,g-1} \\ \Re \varepsilon_{g,0} & \Im \varepsilon_{g,2} & \cdots & \Im \varepsilon_{g,2\ell} & \Re \varepsilon_{g,2\ell} & \cdots & \Im \varepsilon_{g,g-1} & \Re \varepsilon_{g,g-1} \end{bmatrix}$$

偶数 g の場合, $\mathcal{V}$ を次で定義する:

$$\begin{bmatrix} \Im \varepsilon_{1,1} & \Re \varepsilon_{1,1} & \cdots & \Im \varepsilon_{1,2\ell-1} & \Re \varepsilon_{1,2\ell-1} & \cdots & \Im \varepsilon_{1,g-1} & \Re \varepsilon_{1,g-1} \\ \Im \varepsilon_{2,1} & \Re \varepsilon_{2,1} & \cdots & \Im \varepsilon_{2,2\ell-1} & \Re \varepsilon_{2,2\ell-1} & \cdots & \Im \varepsilon_{2,g-1} & \Re \varepsilon_{2,g-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Im \varepsilon_{g-1,1} & \Re \varepsilon_{g-1,1} & \cdots & \Im \varepsilon_{g-1,2\ell-1} & \Re \varepsilon_{g-1,2\ell-1} & \cdots & \Im \varepsilon_{g-1,g-1} & \Re \varepsilon_{g-1,g-1} \\ \Im \varepsilon_{g,1} & \Re \varepsilon_{g,1} & \cdots & \Im \varepsilon_{g,2\ell-1} & \Re \varepsilon_{g,2\ell-1} & \cdots & \Im \varepsilon_{g,g-1} & \Re \varepsilon_{g,g-1} \end{bmatrix}$$

種数 g の MKdV 方程式, sine-Gordon 方程式

$\varphi_i \in \mathbb{R}$ を仮定

Lemma

○ $\mathcal{M}^{-1} = \tilde{\mathcal{K}}\mathcal{U} = \tilde{\mathcal{K}}\mathcal{V}\mathcal{B}$ と書ける

$$\text{但し } \tilde{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} \frac{(-2i)^{g-1}K_1}{\prod_{\ell \neq 1}(s_\ell c_1 - s_1 c_\ell)} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{(-2i)^{g-1}K_g}{\prod_{\ell \neq g}(s_\ell c_1 - s_1 c_\ell)} \end{bmatrix} \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(g)$$

$$\text{○ } \begin{bmatrix} d\varphi_1 \\ \vdots \\ d\varphi_g \end{bmatrix} = \tilde{\mathcal{K}}\mathcal{V}\mathcal{B} \begin{bmatrix} du_1 \\ \vdots \\ du_g \end{bmatrix} = \tilde{\mathcal{K}}\mathcal{V} \begin{bmatrix} dt_1 \\ \vdots \\ dt_g \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} dt_1 \\ \vdots \\ dt_g \end{bmatrix} := \mathcal{B} \begin{bmatrix} du_1 \\ \vdots \\ du_g \end{bmatrix}$$

$$\text{○ } \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{B}}^{[n-3, n-3]} & \tilde{\mathcal{B}}^{[n-3], 1} & \tilde{\mathcal{B}}^{[n-3], 2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2i & i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{B}}^{[n-3], 2} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathfrak{b}_{g-4} \\ i\mathfrak{b}_{g-3} \end{pmatrix}$$

種数 g の MKdV 方程式, sine-Gordon 方程式

$\varphi_i \in \mathbb{R}$ を仮定

Lemma

$$\bigcirc \begin{bmatrix} d\varphi_1 \\ \vdots \\ d\varphi_g \end{bmatrix} = \tilde{\kappa} \mathcal{V} \mathcal{B} \begin{bmatrix} du_1 \\ \vdots \\ du_{g-2} \\ du_{g-1} \\ du_g \end{bmatrix} = \tilde{\kappa} \mathcal{V} \begin{bmatrix} dt_1 \\ \vdots \\ dt_{g-2} \\ i dt_{g-1} \\ dt_g \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} dt_1 \\ \vdots \\ dt_{g-2} \\ i dt_{g-1} \\ dt_g \end{bmatrix} := \mathcal{B} \begin{bmatrix} du_1 \\ \vdots \\ du_{g-2} \\ du_{g-1} \\ du_g \end{bmatrix}$$

$\bigcirc \varphi_k \in \mathbb{R}$ のとき $\mathcal{V} =: [\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_{g-1}, \mathcal{V}_g]$ は $\mathbb{R}$ 値

$$\bigcirc \begin{bmatrix} d\varphi_1 \\ \vdots \\ d\varphi_g \end{bmatrix} = \tilde{\kappa} \mathcal{V}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} dt_1 \\ \vdots \\ dt_{g-2} \\ i dt_{g-1} \\ dt_g \end{bmatrix},$$

種数 g の MKdV 方程式, sine-Gordon 方程式

$\varphi_i \in \mathbb{R}$, g 奇数を仮定

Lemma

$$\bigcirc \begin{bmatrix} d\varphi_1 \\ \vdots \\ d\varphi_g \end{bmatrix} = \mathcal{V}_g dt_g + i\mathcal{V}_{g-1} dt_{g-1} + \mathcal{V}_{g-2} dt_{g-2} + \cdots + \mathcal{V}_1 dt_1,$$

$$\bigcirc dt_i \in T^*\mathbb{R}, \quad \phi = 2(\varphi_1 + \cdots + \varphi_g)$$

$$\bigcirc \begin{bmatrix} \partial_{u_1} \\ \vdots \\ \partial_{u_g} \end{bmatrix} := {}^t\mathcal{B} \begin{bmatrix} \partial_{t_1} \\ \vdots \\ \partial_{t_g} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{B}}^{[n-3, n-3]} & \tilde{\mathcal{B}}^{[n-3], 1} & \tilde{\mathcal{B}}^{[n-3], 2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2i & i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{B}}^{[n-3], 2} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathfrak{b}_{g-4} \\ i\mathfrak{b}_{g-3} \end{pmatrix}$$

$$\partial_{u_g} = \partial_{t_g} + i\partial_{t_{g-1}},$$

$$\partial_{u_{g-1}} = \partial_{t_{g-2}} - 2i\partial_{t_{g-1}} + \sum_i \sqrt{(-1)^i} \mathfrak{b}_{g-2-i} \partial_{t_{g-2-i}},$$

種数 g の MKdV 方程式, sine-Gordon 方程式

$\varphi_i \in \mathbb{R}$, g 奇数を仮定

Lemma

$$\begin{aligned} \bigcirc \quad & \begin{bmatrix} d\varphi_1 \\ \vdots \\ d\varphi_g \end{bmatrix} = \mathcal{V}_g dt_g + i\mathcal{V}_{g-1} dt_{g-1} + \mathcal{V}_{g-2} dt_{g-2} + \cdots + \mathcal{V}_1 dt_1, \\ \bigcirc \quad & dt_i \in T^*\mathbb{R}, \quad \phi = 2(\varphi_1 + \cdots + \varphi_g) \\ \bigcirc \quad & \begin{bmatrix} \partial_{u_1} \\ \vdots \\ \partial_{u_g} \end{bmatrix} := {}^t\mathcal{B} \begin{bmatrix} \partial_{t_1} \\ \vdots \\ \partial_{t_g} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{B}}^{[n-3, n-3]} & \tilde{\mathcal{B}}^{[n-3], 1} & \tilde{\mathcal{B}}^{[n-3], 2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2i & i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{B}}^{[n-3], 2} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathfrak{b}_{g-4} \\ i\mathfrak{b}_{g-3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{u_g, r} \phi_r &= \partial_{t_g} \phi_r = 2(1, 1, \dots, 1) \mathcal{V}_g \\ \partial_{u_g, r} \phi_i &= \partial_{u_g, i} \phi_r = \partial_{t_{g-1}} \phi_r = 2(1, 1, \dots, 1) \mathcal{V}_{g-1} \\ \partial_{u_{g-1}, r} \phi_r &= 2(1, 1, \dots, 1) \mathcal{V}_{g-2} + \sum_i \mathfrak{b}_{g-1-2i} \mathcal{V}_{g-1-2i} \end{aligned}$$

種数 g の MKdV 方程式, sine-Gordon 方程式

$\varphi_i \in \mathbb{R}$, g 奇数を仮定

Theorem

g : 奇数: (特殊な) ある超楕円曲線のクラスにおいて, アーベル積分

$$\text{AI} : S^g \tilde{Z} \rightarrow (\mathbb{R}^{(g+1)/2} \oplus i\mathbb{R}^{(g-1)/2}) \subset \mathbb{C}^g$$

が定まる.

g : 偶数: (特殊な) ある超楕円曲線のクラスにおいて, アーベル積分

$$\text{AI} : S^g \tilde{Z} \rightarrow (\mathbb{R}^{g/2} \oplus i\mathbb{R}^{g/2}) \subset \mathbb{C}^g$$

が定まる.

曲線の実値 (S^1) 構造と AI の像の実値構造が両立できる
(逆写像を実超楕円 am 関数と呼ぶ)

種数 g の MKdV 方程式, sine-Gordon 方程式

$\varphi_i \in \mathbb{R}$, g 奇数を仮定

Theorem

φ_a , ($a = 1, 2, \dots, g$) の適当な初期値に対して,
 $\phi_r := 2(1, 1, \dots, 1) \left[\int^{t_g} \mathcal{V}_g dt_g + \int^{t_{g-2}} \mathcal{V}_{g-2} dt_{g-2} \right]$ はゲージ場付き MKdV 方程式を満たす

$$\frac{\partial^3 \phi_r}{\partial t_g^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial t_g} \right)^3 = 4 \frac{\partial}{\partial u_{g-1} r} \phi_r - 2(\lambda_{2g} + 3b_0 + \frac{3}{8} \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial t_{g-1}} \right)^2) \frac{\partial \phi_r}{\partial t_g}$$

$\partial_{u_g, r} \phi_i = 2(1, 1, \dots, 1) \mathcal{V}_{g-1} = 0$ の条件の下で,
 $\{(t_g, t_{g-2}) \in \mathbb{R}^2 \mid t_i \in \mathbb{R}\}$ は MKdV 方程式の実解を与える.

○解を明示化したい (グラフに表示したい) .

○ $\partial_{t_{g-1}} \phi_r = 2(1, \dots, 1) \mathcal{V}_{g-1} = 0$ の構造を解明したい

- ① 研究の目的
- ② 種数 1 の KdV 方程式、
- ③ 種数 1: 被覆空間 am 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式
- ④ 種数 2 の KdV 方程式、
- ⑤ 種数 2: 被覆空間 $\hat{X}$ am 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式
- ⑥ 種数 g : 被覆空間 $\hat{X}$ am 関数, MKdV, sine-Gordon 方程式
- ⑦ 種数 g : $TS^g \hat{X}$ と TJ_X
- ⑧ → 集光型 MKdV 方程式と DNA の形状

Euler elastica を超える試み 高次種数化

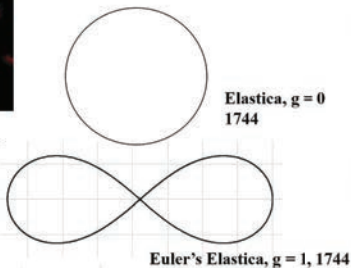
- ① 1998: M: 弾性曲線の統計力学の定式化: $Z = \int^s e^{i\phi} ds$
(DNA 形状の表現 = 「幾何学の統計力学 (量子化) の例」)
(実数体上の MKdV 方程式による構成)
- ② 2016: M-Previato, Euler-Bernoulli エネルギー汎関数による実平面曲線のモデュライの分類
- ③ 2002-, 複素数体上の MKdV 方程式の超楕円関数解の提示
(Weierstrass の al 関数, σ 関数による)
- ④ 2021: M-Previato ($g = 2$)
複素数体上の MKdV 方程式の超楕円関数解から
実数体上への制限の試みと, 実曲線の構成
- ⑤ 2024: M $g = 3$

超楕円 MKdV 方程式の実解

Euler elastica を超える試 高次種数化 $g = 3$

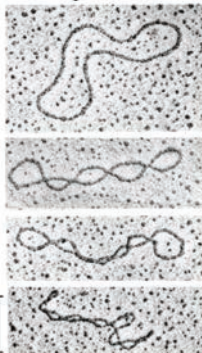


A.L.B.Pyne, et.al.,
Nature communications
(2021) 12:1053



Shigeki Matsutani, Nov. 21, 2024

Supercoiled DNA



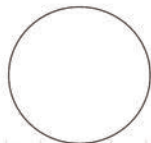
Electron micrographs of DNA (mini ColE1 plasmid dimer, 5kb) by Laurien Polder [A. Kornberg and T. A. Baker, DNA Replication, 2nd ed., W. H. Freeman & Co., 1992 Fig. 1-24 p. 36.

超楕円 MKdV 方程式の実解

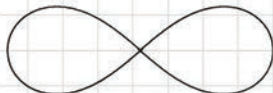
Euler elastica を超える試 高次種数化 $g = 3$



A.L.B.Pyne, et.al.,
Nature communications
(2021) 12:1053



Elastica, $g = 0$
1744



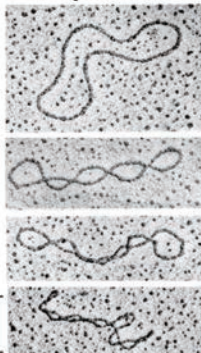
Euler's Elastica, $g = 1$, 1744



GMKdV elastica $\neq$ MKdV elastica,
 $g = 3$, 2024 S. Matsutani

Shigeki Matsutani, Nov. 21, 2024

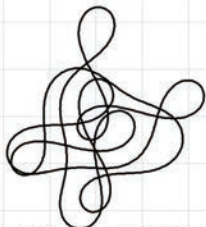
Supercoiled DNA



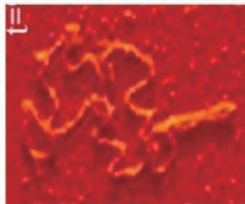
Electron micrographs of DNA (mini ColE1 plasmid dimer, 5kb) by Laurien Polder [A. Kornberg and T. A. Baker, DNA Replication, 2nd ed., W. H. Freeman & Co., 1992 Fig. 1-24 p. 36.

超楕円 MKdV 方程式の実解

Euler elastica を超える試み 高次種数化 $g = 3$

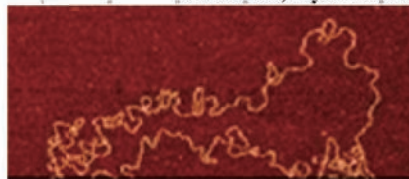
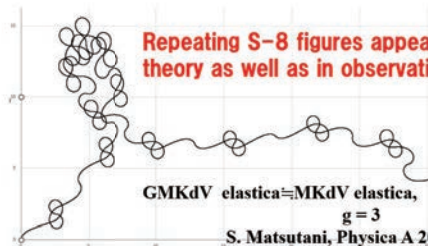


GMKdV elastica $\neq$ MKdV elastica,
 $g = 3$, 2024 S. Matsutani



Supercoiled DNA

L. Alonso-Sarduy, et al.,
Nano Lett. **13**, (2013) 5679–5684



Supercoiled DNA

A. Japaridze, et al., Nano Lett.
17 3, (2017) 1938–1948

Euler elastica を超える試み 高次種数化

● DNA の形状は代数幾何により定まる.

(許される形状は実値性 (ヤコビ多様体の有理型関数の実値分布条件から) 制限される)

⇒ 生命現象と現代数学の新たなコラボレーションを示す

● 8 の字形状 ($g = 1$ の ζ 関数) の次に複雑な代数曲線から許される形状は, $g > 3$ の超楕円 ζ 関数となり, 交差点が ($> 4?$) になる

● 生命の進化に関連する? (単純生物から急に複雑になる?)

予想

同様の方法で、 $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた負ガウス曲率一定曲面は (Hilbert 1899)

$$(\partial_s^2 - \partial_t^2)\phi = \sin \phi \cos \phi$$

となることが知られており、上記の方法で解の構成を明示的に行うことが可能と予想される。

⇒ これらは超楕円ヤコビ多様体 J_X の普遍被覆 $\mathbb{C}^g$ の中の $\mathbb{R}^2$ 上の関数として実現・分類される。

超楕円 MKdV 方程式の実解

用の美としての数学



2025年

用の美としての数学史：

ベルヌーイ、オイラー、ガウス：弾性曲線と楕円関数の歴史

ガウス、アーベル、フィエルシュトラス、ベーカー：代数関数（リーマン的でない代数関数論）



ご静聴ありがとうございました