Veronese 多様体・Segre 多様体等の高階 secant 多様体の研究

joint work with Kangjin HAN (Daegu)

古川 勝久 (坂戸)
E-mail: katu@josai.ac.jp

第 31 回沼津改め静岡研究会

Outline

1. 背景: k-secant 多様体の研究
2. 結果: 特異点，$\sigma_4(v_3(\mathbb{P}^3))$ の定義式系
3. Prolongation と Weight space decomposition

1. 背景: k-secant 多様体の研究

射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ に対し，k-secant 多様体 $\sigma_k(X) \subset \mathbb{P}^N$ は，「X の k 個の点の張る $(k-1)$-平面の和集合」の Zariski 閉包として定まる．つまり，

$$\sigma_k(X) := \overline{\bigcup_{x_1, x_2, \ldots, x_k \in X} \langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle} \subset \mathbb{P}^N.$$

ここで，

- $\dim \sigma_k(X) \leqslant k \cdot \dim(X) + k - 1$
- "$<$" のとき，$\sigma_k(X)$ は **secant defective** であるという．

特異点に関しては，

$$\boldsymbol{\sigma_{k-1}(X)} \subset \mathrm{Sing}(\sigma_k(X)).$$

- 左辺を $\sigma_k(X)$ の**自明な特異点集合**と呼ぼう．

どんなとき**非自明な特異点**は存在するか？

Tensors

X を Veronese あるいは Segre 多様体として取れば，$\sigma_k(X)$ の点は **(Waring) border rank** $\leqslant k$ のテンソルに対応する．

$n+1$ 次元ベクトル空間 V に対して，写像

$$V \to S^d V, \quad w \mapsto w^{\otimes d}$$

は，$v_d : \mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^N = \mathbb{P}S^d V$ (d 次 Veronese 埋込み) をみちびく．

- $v_d(\mathbb{P}^n)$ の点 $w^{\otimes d}$ は，rank 1 のテンソル．
- $\sigma_k(v_d(\mathbb{P}^n))$ の (一般) 点は $t = w_1^{\otimes d} + \cdots + w_k^{\otimes d}$ と書けて，rank k のテンソル．

$\sigma_k(X)$ としては閉包を取るので，その点は border rank $\leqslant k$ のテンソル，ということになる．

同様に，

$$V_1 \times \cdots \times V_r \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$$

は，$\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r} \hookrightarrow \mathbb{P}^N = \mathbb{P}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_r)$ (Segre 埋込み) をみちびく．

- $\sigma_k(\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r})$ の (一般) 点は $t = \sum_{i=1}^k w_{i,1} \otimes \cdots \otimes w_{i,r}$

サーモン予想

このような基本的な対象であっても，$\sigma_k(X)$ について知ることは容易ではない．例えば，Allman 氏は phylogenetics(分子系統学) の観点から次のような問題を提起した (2007).

Open Problem

4-secant 多様体

$$\sigma_4(\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3)$$

の定義イデアルを決定せよ．

ここで $\mathbb{P}^{4-1} = \mathbb{P}^3$ があらわれ，また 4-secant を取るのは，DNA を構成する 4 つのヌクレオチド A, C, G, T に由来するという．

$$\begin{array}{c} \text{祖先} \\ \downarrow\downarrow\downarrow \\ \text{3 つの現生種} \end{array} \qquad \text{(進化)}$$

サーモン予想に関する結果

- Bates and Oeding
- Friedland and Gross: 集合論的な定義方程式を与えた (2012).

しかし，$\sigma_4(\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3)$ の定義イデアルを決定する問題は未解決のままである．

Landsberg, *Tensors: geometry and applications*, Ch. 14

- F-Han: 対称化した Veronese 多様体 $\sigma_4(\nu_3(\mathbb{P}^3))$ の定義イデアルを生成する 36 個の多項式を決定した．
  - 計算するためのプログラムも公開している．[a]
  - ヒトの手でチェック可能．

[a] https://github.com/katufurukawa/ProlongationKernels

この Veronese 多様体の結果は，もともとは別の目標があって得られた．そのあたりを説明してゆきたい．

$\sigma_k(\nu_d(\mathbb{P}^n))$ の性質…次元・定義式・特異点

次元定理 (Alexander-Hirschowitz)

$\nu_d : \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^{\beta = \binom{m+d}{d} - 1}$ に対してつぎが同値となる:

1. $\sigma_k(\nu_d(\mathbb{P}^m))$ は $\neq \mathbb{P}^\beta$, かつ secant defective である.
2. $d = 2$ かつ $2 \leqslant k \leqslant m$, または
   $(k, d, m) = (7, 3, 4), (5, 4, 2), (9, 4, 3), (14, 4, 4)$ である.
   - なお，後者の 4 つは超曲面となる

- このように，$\sigma_k(\nu_d(\mathbb{P}^n))$ の次元がどうなるかは完全にわかっている.
- しかし，他の性質に関しては，特定の場合 (k, d, n が小さいときなど) にわかっているのみである.
  - つづいていくつかの結果を見てみたい.

Aronhold invariant

古典的に，

$$\sigma_3(\nu_3(\mathbb{P}^2)) \subset \mathbb{P}^9$$

は **4 次超曲面**であり，Aronhold invariant と呼ばれている．

Ottaviani (Nagoya Math. J. 193 (2009), Theorem 1.2)

V: 3 次元，$\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}V$.
$\Gamma^{2,1}V$: ヤング図形 $(2,1)$ に関する V の Schur 加群．

- $\dim(\Gamma^{2,1}V) = 8$.

$\varphi \in S^3V$ に対して，自然な写像

$$A_\varphi : \Gamma^{2,1}V \to \Gamma^{2,1}V.$$

がある．このとき，A_φ は 8×8 の歪対称線形行列で表現され，その **Pfaffian** が次数 4 の $\sigma_3(\nu_3(\mathbb{P}^2))$ の定義方程式となる．

$\varphi \in S^3V$

$$\begin{ytableau} \star & \star & \star \end{ytableau}$$

$A_\varphi : \Gamma^{2,1}V \to \Gamma^{2,1}V$

$$\begin{ytableau} \; & \; \\ \; \end{ytableau} \longrightarrow \begin{ytableau} \; & \; & \star \\ \; & \star \\ \star \end{ytableau} \simeq \begin{ytableau} \; & \; \\ \; \end{ytableau}$$

- V は 3 次元なので，
  $\wedge^3 V$,

$$\begin{ytableau} \; \\ \; \\ \; \end{ytableau} \simeq \mathbb{C}$$

定義式・定義イデアル

- 古典的例: (前述のとおり) $\sigma_3(v_3(\mathbb{P}^2)) \subset \mathbb{P}^9$ は 4 次の超曲面となり，その定義多項式は **Aronhold invariant** と呼ばれる．Ottaviani は Schur 加群を用い，これを歪対称行列の Pfaffian として記述した．
- 発展として，Landsberg-Ottaviani により，定義式を表現論的に得る Young flattening の手法などを提起されている．
  - 例: $(k, d, n) = (6, 5, 2)$ (余次元 3) の定義イデアルの決定．

特異点

- 古典的結果: $n = 1$ あるいは $d = 2$ のとき，$\forall k$ で $\sigma_k(v_d(\mathbb{P}^n))$ に非自明な特異点は存在しない．
- Kanev: $k = 2$ の場合には，$\forall n, d$ で非自明な特異点が存在しない
- Han: $k = 3$ の場合は「$d = 4$ かつ $n \geqslant 3$」のときのみ**非自明な特異点が存在する**.

2. 結果: 特異点, $\sigma_4(\nu_3(\mathbb{P}^3))$ の定義式系

論文

[1] K. Furukawa and K. Han, *On the singular loci of higher secant varieties of Veronese embeddings*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), vol. 2025, no. 824, 2025, pp. 203–251, `https://doi.org/10.1515/crelle-2025-0027` (Open Access).

[2] K. Furukawa and K. Han, *On the prime ideals of higher secant varieties of Veronese embeddings of small degrees*, `arXiv:2410.00652`.

- $Y := \sigma_k(\nu_d(\mathbb{P}^n)) \subset \mathbb{P}^{N=\binom{n+d}{d}-1}$
- $S^{\mathrm{triv}} := \sigma_{k-1}(\nu_d(\mathbb{P}^n))$ (Y の自明な特異点集合)

さて，m-平面 $\mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^n$ に対し，

$$\sigma_k(\nu_d(\mathbb{P}^m)) \subset Y = \sigma_k(\nu_d(\mathbb{P}^n))$$

に注目する．

$\sigma_k(\nu_d(\mathbb{P}^m))$ の点で Y は特異的だろうか？

射影幾何の技法を用いて研究
Terracini's lemma, trisecant lemma, Gauss map (埋込み接空間の記述)，tangential projections, ...

定理 1 ([1] の Thm 2)

$k \geqslant 4$, $d \geqslant 3$, $n \geqslant 3$ および $2 \leqslant m < \min\{k-1, n\}$ について，

$$(d, m) \notin \mathcal{E} = \{(3,3), (3,4), (3,5), (4,2), (4,3), (4,4), (5,2), (6,2)\}$$

を要請する．このとき，

$(k, d, n) \neq (4, 3, 3)$ の場合，$\mu = \left\lceil \frac{\binom{m+d}{m}}{m+1} \right\rceil$ に対しつぎが成立する．

(i) $k > \mu$ ならば，Y は $\sigma_k(v_d(\mathbb{P}^m))$ の一般点で滑らかである．

(ii) $k = \mu$ ならば，$\sigma_k(v_d(\mathbb{P}^m))$ は**非自明な特異点**を与える．すなわち，$\sigma_k(v_d(\mathbb{P}^m)) \subset \mathrm{Sing}(Y)$ かつ $\sigma_k(v_d(\mathbb{P}^m)) \not\subset S^{\mathrm{triv}}$.

(iii) $k < \mu$ ならば，$\sigma_k(v_d(\mathbb{P}^m)) \subset S^{\mathrm{triv}}$ である．

一方で，$(k, d, n) = (4, 3, 3)$ の場合にはつぎが成立する．

(iv) $Y = \sigma_4(v_3(\mathbb{P}^3))$ は $\sigma_4(v_3(\mathbb{P}^2)) \setminus S^{\mathrm{triv}}$ の任意の点で滑らかである．

上に述べた他に，つぎの場合にも結果が得られている ([1] の Thm 1, 3).

- $m = 1$: とくに，Han の先行結果での非自明な特異点は

$$\mathrm{Sing}(\sigma_3(v_4(\mathbb{P}^n))) = \bigcup_{\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^n} \langle v_4(\mathbb{P}^1) \rangle$$

と表現できる ($n \geqslant 3$).

- $(d, m) \in \mathcal{E}$: 下の表に対応し，(i), (ii), (iii) がなりたつ．

(d, m)	$\frac{\binom{m+d}{m}}{m+1}$	(i)	(ii)	(iii)
$(3, 3)$	5	$k \leqslant 5$	None	$6 \leqslant k$
$(3, 4)$	7	$k \leqslant 6$	$k = 7, 8$	$9 \leqslant k$
$(3, 5)$	$28/3$	$k \leqslant 8$	$k = 9, 10$	$11 \leqslant k$
$(4, 2)$	5	$k \leqslant 4$	$k = 5, 6$	$7 \leqslant k$
$(4, 3)$	$35/4$	$k \leqslant 7$	$k = 8, 9, 10$	$11 \leqslant k$
$(4, 4)$	14	$k \leqslant 13$	$k = 14, 15$	$16 \leqslant k$
$(5, 2)$	7	$k \leqslant 7$	None	$8 \leqslant k$
$(6, 2)$	$28/3$	$k \leqslant 8$	$k = 9, 10$	$11 \leqslant k$

(iv) について

(iv) のときは，値としては (ii) に属するのだが，しかし**非自明な特異点が生じない**.

- それを示すため，この場合については定義式を求めて特異点を計算した．
- さらに次のことがわかった．

定理 2 ([2])

1. $\sigma_4(v_3(\mathbb{P}^3)) \subset \mathbb{P}^{19}$ は **del Pezzo 4-secant 多様体**である．
   - とくに $\deg(\sigma_4(v_3(\mathbb{P}^3))) = 105$.
2. イデアル $\mathbb{I}(\sigma_4(v_3(\mathbb{P}^3)))$ は **36 個の 5 次多項式**で最小に生成系され，その極小自由分解は，

$$0 \to S(-12) \to S(-7)^{36} \to S(-6)^{70} \to S(-5)^{36} \to \mathbb{I}(\sigma_4(v_3(\mathbb{P}^3))) \to 0$$

   であり，arithmetically Gorenstein var of codim 4 となる．

- 「del Pezzo k-secant 多様体」は Choe-Kwak により定義されたもので，Ciliberto-Russo の研究した「極小次数をもつ k-secant 多様体」につづく**次数の小さい多様体**となっている．

3. Prolongation と Weight space decomposition

Degrees

- Ciliberto-Russo によれば，射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ に対して，

$$\deg \sigma_k(X) \geqslant \binom{e+k}{k}$$

となる．ここで $e = \mathrm{codim}(\sigma_k(X), \mathbb{P}^N)$．等号が成立するとき，$\sigma_k(X)$ は (k-secant として) **minimal degree** をもつという．

- Choe-Kwak によれば，もし $\sigma_k(X)$ が minimal degree の k-secant でないならば，

$$\deg \sigma_k(X) \geqslant \binom{e+k}{k} + \binom{e+k-1}{k-1}$$

となる．上記の等号と，sectional genus の等式

$$\pi(\sigma_k(X)) = (k-1)\left(\binom{e+k}{k} + \binom{e+k-1}{k-1}\right) - 1$$

が成立するとき，$\sigma_k(X)$ は **del Pezzo k-secant variety** であるという．

これらの次数の小さい多様体に関するいくつかの同値条件が研究されている．

本発表では以下を用いる：

- minimal degree $\Longleftrightarrow$ $\dim \mathbb{I}(\sigma_k(X))_{k+1} = \binom{e+k}{1+k}$
- del Pezzo k-secant $\Longleftrightarrow$ $\dim \mathbb{I}(\sigma_k(X))_{k+1} = \binom{e+k}{1+k} - \binom{e+k-2}{k-1}$

$\sigma_4(v_3(\mathbb{P}^3))$ について，$e = 4$ である．
このとき $\binom{e+k}{1+k} = 56$, $\binom{e+k}{1+k} - \binom{e+k-2}{k-1} = 36$ となる．

- 目標: $\dim \mathbb{I}(\sigma_4(v_3(\mathbb{P}^3)))_5 = 36$
- $\sigma_4(v_3(\mathbb{P}^3))$ が dP4 であることが示されれば，この多様体にいろいろな既知の方法を適用できて，$\mathbb{I}(\sigma_4(v_3(\mathbb{P}^3)))$ が 36 個の多項式によって minimal に生成されることもいえる．

今日の設定

1. $\nu_d : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ を Veronese 埋込み，$N = \binom{n+d}{d} - 1$.
   $t_0, t_1, \ldots, t_n$: $\mathbb{P}^n$ 上の座標．
   $\{ s_\alpha \}$: $\mathbb{P}^N$ 上の座標．ここで，$\alpha = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}_{\geqslant 0}$ かつ $|\alpha| = \sum a_i = d$.

$$\nu_d^* : S(\mathbb{P}^N) = \mathbb{C}[\{ s_\alpha \}] \to S(\mathbb{P}^n) = \mathbb{C}[t_0, t_1, \ldots, t_n]$$
$$s_\alpha \mapsto t^\alpha = t_0^{a_0} t_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n}$$

2. $\beta \in \mathbb{Z}^{n+1}_{\geqslant 0}$ に対して，単項式 $m = s_{\alpha_1}^{i_1} \cdots s_{\alpha_\mu}^{i_\mu}$ が **weight** β であるとは，$\nu_d^*(m) = t^\beta$, すなわち $i_1\alpha_1 + \cdots + i_\mu \alpha_\mu = \beta$ がなりたつことである．
3. $L_\beta \subset \mathbb{C}[\{ s_\alpha \}]_{\frac{|\beta|}{d}}$: weight β の単項式で生成される subspace.
4. 整数 $e > 0$ に対して，

$$\mathbb{C}[\{ s_\alpha \}]_e = \bigoplus_{|\beta| = de} L_\beta .$$

例 (Aronhold case)

$\nu_3 : \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^9$

$$\nu_3^* : S(\mathbb{P}^9) = \mathbb{C}[s_{300}, s_{210}, \dots, s_{003}] \to S(\mathbb{P}^2) = \mathbb{C}[t_0, t_1, t_2]$$
$$s_{300} \mapsto t_0^3,\ s_{210} \mapsto t_0^2 t_1,\ \dots,\ s_{111} \mapsto t_0 t_1 t_2, \dots,\ s_{003} \mapsto t_2^3$$

$$\mathbb{C}[s_{300}, s_{210}, \dots, s_{003}]_4 = \bigoplus_{|\beta|=12} L_\beta = L_{12,0,0} \oplus L_{11,1,0} \oplus \cdots \oplus L_{4,4,4} \oplus \cdots$$

例えば，L_{444} は以下の基底を持つ 25 次元の空間である．

$s_{300}s_{120}s_{021}s_{003}$	$s_{300}s_{120}s_{012}^2$	$s_{300}s_{111}s_{030}s_{003}$	$s_{300}s_{111}s_{021}s_{012}$	$s_{300}s_{102}s_{030}s_{012}$
$s_{300}s_{102}s_{021}^2$	$s_{210}^2s_{021}s_{003}$	$s_{210}^2s_{012}^2$	$s_{210}s_{201}s_{030}s_{003}$	$s_{210}s_{201}s_{021}s_{012}$
$s_{210}s_{120}s_{111}s_{003}$	$s_{210}s_{120}s_{102}s_{012}$	$s_{210}s_{111}^2s_{012}$	$s_{210}s_{111}s_{102}s_{021}$	$s_{210}s_{102}^2s_{030}$
$s_{201}^2s_{030}s_{012}$	$s_{201}^2s_{021}^2$	$s_{201}s_{120}^2s_{003}$	$s_{201}s_{120}s_{111}s_{012}$	$s_{201}s_{120}s_{102}s_{021}$
$s_{201}s_{111}^2s_{021}$	$s_{201}s_{111}s_{102}s_{030}$	$s_{120}^2s_{102}^2$	$s_{120}s_{111}^2s_{102}$	s_{111}^4

Prolongation

部分空間 $A \subset S^d V^*$ に対して，A の **p-th prolongation** $A^{(p)}$ を

$$A^{(p)} = \left\{ G \in S^{d+p} V^* \mid \text{任意の } |\alpha| = p \text{ に対して } \frac{\partial^p G}{\partial x^\alpha} \in A \right\}$$

で定める．このとき，任意の (non-degenerate) 多様体 $X \subset \mathbb{P}V$ に対して $\mathbb{I}(\sigma_k(X))_k = 0$ かつ $\mathbb{I}(\sigma_k(X))_{k+1} = \mathbb{I}(X)_2^{(k-1)}$ であることが知られている．

いまの状況だと，$X = \nu_d(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^N$ である．このとき，
$\mathbb{I}(X)_2 = \ker(\nu_d^*)$ なので，

$$\mathbb{I}(\sigma_k(X))_{k+1} = \ker(\nu_d^*)^{(k-1)}$$

がなりたつ．

今，Ψ を以下の合成写像とする．

$$\Psi : \mathbb{C}[\{s_\alpha\}]_{k+1} \xrightarrow{\mathcal{D}} \bigoplus_{m=s_{\alpha_1}^{j_1}\cdots s_{\alpha_\mu}^{j_\mu}} \mathbb{C}[\{s_\alpha\}]_2 \cdot e(m)$$

$$\xrightarrow{\oplus \nu_d^*} \bigoplus_{m=s_{\alpha_1}^{j_1}\cdots s_{\alpha_\mu}^{j_\mu}} \mathbb{C}[t_0, t_1, \ldots, t_n]_{2d} \cdot e(m),$$

- $\mathcal{D}$ は，$f \in \mathbb{C}[\{s_\alpha\}]_{k+1}$ を $m = s_{\alpha_1}^{j_1} \cdots s_{\alpha_\mu}^{j_\mu}$ に関して $\frac{\partial^{k-1} f}{(\partial s_{\alpha_1})^{j_1} \cdots (\partial s_{\alpha_\mu})^{j_\mu}} e(m)$ へ送る．

このとき，以下がなりたつ．

$$\mathbb{I}(\sigma_k(\nu_d(\mathbb{P}^n)))_{k+1} = \ker(\Psi).$$

理論的には，$\mathbb{I}(\sigma_k(X))_{k+1}$ は線型代数でわかる．しかし，その計算は非常に重い．

- $\sigma_4(\nu_3(\mathbb{P}^3))$ の場合，$\dim \mathbb{C}[\{s_\alpha\}]_{k+1} = 42504$ であり，Ψ の終域の次元は 129360 である．

イデアルの分解

$\beta - \delta \in \mathbb{Z}^{n+1}_{\geqslant 0}$ のとき $\delta \subset \beta$ と書く．

Proposition 3

L_β の基底 $\{\frac{1}{i_1!\cdots i_\mu!} s_{\alpha_1}^{i_1}\cdots s_{\alpha_\mu}^{i_\mu}\}$（ここで $i_1\alpha_1+\cdots+i_\mu\alpha_\mu=\beta$）を考える．このとき，$\Psi|_{L_\beta}$ は以下で与えられる．

$$\Psi\left(\frac{1}{i_1!\cdots i_\mu!} s_{\alpha_1}^{i_1}\cdots s_{\alpha_\mu}^{i_\mu}\right) = \sum_{\substack{\delta\subset\beta,\ |\delta|=d(k-1),\\ m=s_{\alpha_1}^{j_1}\cdots s_{\alpha_\mu}^{j_\mu}\in L_\delta}} \frac{1}{(i_1-j_1)!\cdots(i_\mu-j_\mu)!} t^{\beta-\delta} e(m)$$

- $(i_1-j_1)!\cdots(i_\mu-j_\mu)! \in \{1,2\}$ であることに注意．

したがって，$\Psi = \bigoplus_{|\beta|=d(k+1)} \Psi|_{L_\beta}$ であり，以下がなりたつ．

$$\mathbb{I}(\sigma_k(\nu_d(\mathbb{P}^n)))_{k+1} = \ker(\Psi) = \bigoplus_{|\beta|=d(k+1)} K_\beta$$

ここで $K_\beta = K_\beta^{(k)} := \ker(\Psi|_{L_\beta})$ である．

Combinatorics

$\varepsilon \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^{n+1}$ に対し，L_ε に属する単項式の集合を $M(L_\varepsilon)$ とおく．

Corollary 4

$c(f; s_{\alpha_1}^{i_1}\cdots s_{\alpha_\mu}^{i_\mu})$ を，$L_\beta \subset \mathbb{C}[\{s_\alpha\}]_{k+1}$ の基底 $\frac{1}{i_1!\cdots i_\mu!}s_{\alpha_1}^{i_1}\cdots s_{\alpha_\mu}^{i_\mu}$ に関する $f \in L_\beta$ の係数とする．このとき，以下の 2 条件は同値:

(i) $f \in K_\beta = \ker(\Psi|_{L_\beta})$.

(ii) 任意の $|\varepsilon| = 2d$ なる $\varepsilon \subset \beta$ および任意の $m \in M(L_{\beta-\varepsilon})$ に対して，

$$\sum_{q \in M(L_\varepsilon)} \frac{1}{\nu(q)} c(f; mq) = 0,$$

ここで，ある $\alpha_1 \neq \alpha_2$ に対して $q = s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}$ ならば $\nu(q) = 1$，ある α に対して $q = s_\alpha^2$ ならば $\nu(q) = 2$ である．
(特に，$M(L_\varepsilon) = \{q\}$ なら $c(f; mq) = 0$.)

例 (Aronhold invariant)

$\nu_3 : \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^9$ において，$\sigma_3(\nu_3(\mathbb{P}^2))$ は次数 4 の超曲面である．このとき，$S(\mathbb{P}^9) = \mathbb{C}[s_{300}, s_{210}, \ldots, s_{003}]$,

$$\mathbb{I}(\sigma_3(\nu_3(\mathbb{P}^2)))_4 = \bigoplus_{|\beta|=12} K_\beta$$

である．$f \in K_{444} \subset L_{444}$ の 25 個の係数を決定する．

(1) $\varepsilon = (4,2,0)$ の場合 $\rightsquigarrow s_{210}^2, s_{300}s_{120} \in L_{(4,2,0)}$
$\frac{1}{2}c(f; s_{210}^2 s_{021}s_{003}) + c(f; s_{300}s_{120}s_{021}s_{003}) = 0$. ($m = s_{021}s_{003}$, 次ページで説明)

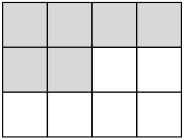
$\varepsilon = (0,2,4)$ の場合 $c(f; s_{210}^2 s_{021}s_{003}) + \frac{1}{2}c(f; s_{210}^2 s_{012}^2) = 0$.

$c(f; s_{210}^2 s_{021}s_{003}) = 2$ とおく.

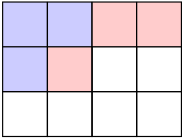
このとき $c(f; s_{300}s_{120}s_{021}s_{003}) = -1$, $c(f; s_{210}^2 s_{012}^2) = -4$ となる．

$|\varepsilon| = 2d$ なる $\varepsilon \subset \beta$, $q \in M(L_\varepsilon)$, $m \in M(L_{\beta-\varepsilon})$

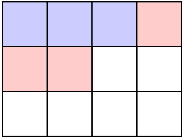
$\varepsilon = (4, 2, 0) \subset \beta = (4, 4, 4)$
$|\varepsilon| = 6$



$$q = s_{210}^2$$



$$q = s_{300}s_{120}$$



白い部分も $m = s_{021}s_{003} \in L_{024}$ に分割して，
$\frac{1}{2}c(f; s_{210}^2 s_{021}s_{003}) + c(f; s_{300}s_{120}s_{021}s_{003}) = 0$ がでてくる．

(2) $\varepsilon = (4,2,0)$ に対して，$\frac{1}{2}c(f; s_{210}^2 s_{012}^2) + c(f; s_{300}s_{120}s_{012}^2) = 0.$
$\varepsilon = (1,4,1)$, $c(f; s_{300}s_{111}s_{030}s_{003}) + c(f; s_{300}s_{120}s_{021}s_{003}) = 0.$
$\varepsilon = (3,0,3)$, $c(f; s_{201}s_{120}s_{102}s_{021}) + c(f; s_{300}s_{120}s_{021}s_{003}) = 0.$

したがって，$c(f; s_{300}s_{120}s_{012}^2) = 2,$
$c(f; s_{300}s_{111}s_{030}s_{003}) = c(f; s_{201}s_{120}s_{102}s_{021}) = 1.$

(3)
$\varepsilon = (3,3,0)$, $c(f; s_{300}s_{111}s_{030}s_{003}) + c(f; s_{210}s_{120}s_{111}s_{003}) = 0.$
$\varepsilon = (4,1,1)$, $c(f; s_{300}s_{111}s_{030}s_{003}) + c(f; s_{210}s_{201}s_{030}s_{003}) = 0.$
$\varepsilon = (1,4,1)$, $c(f; s_{201}s_{120}s_{102}s_{021}) + c(f; s_{201}s_{111}s_{102}s_{030}) = 0.$
$\varepsilon = (0,3,3)$, $c(f; s_{300}s_{111}s_{030}s_{003}) + c(f; s_{300}s_{111}s_{021}s_{012}) = 0.$
$\varepsilon = (1,1,4)$, $c(f; s_{300}s_{111}s_{030}s_{003}) + c(f; s_{300}s_{102}s_{030}s_{012}) = 0.$

したがって，$c(f; s_{210}s_{120}s_{111}s_{003}) = c(f; s_{210}s_{201}s_{030}s_{003}) =$
$c(f; s_{201}s_{111}s_{102}s_{030}) = c(f; s_{300}s_{111}s_{021}s_{012}) =$
$c(f; s_{300}s_{102}s_{030}s_{012}) = -1.$

(4)

$\varepsilon = (3,3,0),\ c(f; s_{300}s_{102}s_{030}s_{012}) + c(f; s_{210}s_{120}s_{102}s_{012}) = 0.$
$\varepsilon = (2,4,0),\ \frac{1}{2}c(f; s_{201}s_{120}^2 s_{003}) + c(f; s_{210}s_{201}s_{030}s_{003}) = 0.$
$\varepsilon = (4,1,1),\ c(f; s_{210}s_{201}s_{021}s_{012}) + c(f; s_{300}s_{111}s_{021}s_{012}) = 0.$
$\varepsilon = (4,0,2),\ c(f; s_{300}s_{102}s_{030}s_{012}) + \frac{1}{2}c(f; s_{201}^2 s_{030}s_{012}) = 0.$
$\varepsilon = (3,1,2),$
$c(f; s_{300}s_{102}s_{030}s_{012}) + c(f; s_{210}s_{102}^2 s_{030}) + c(f; s_{201}s_{111}s_{102}s_{030}) = 0.$
$\varepsilon = (0,4,2),\ c(f; s_{300}s_{102}s_{030}s_{012}) + \frac{1}{2}c(f; s_{300}s_{102}s_{021}^2) = 0.$

したがって，$c(f; s_{210}s_{120}s_{102}s_{012}) = c(f; s_{210}s_{201}s_{021}s_{012}) = 1.$
$c(f; s_{201}s_{120}^2 s_{003}) = c(f; s_{201}^2 s_{030}s_{012}) = c(f; s_{300}s_{102}s_{021}^2) = 2.$
$c(f; s_{210}s_{102}^2 s_{030}) (=$
$-c(f; s_{300}s_{102}s_{030}s_{012}) - c(f; s_{201}s_{111}s_{102}s_{030})) = 2.$

(5) $\varepsilon = (2,4,0)$, $\frac{1}{2}c(f; s_{120}^2 s_{102}^2) + c(f; s_{210} s_{102}^2 s_{030}) = 0.$
$\varepsilon = (3,2,1)$,
$c(f; s_{300} s_{102} s_{021}^2) + c(f; s_{210} s_{111} s_{102} s_{021}) + c(f; s_{201} s_{120} s_{102} s_{021}) = 0.$
$\varepsilon = (2,3,1)$,
$c(f; s_{210} s_{201} s_{021} s_{012}) + c(f; s_{201}^2 s_{030} s_{012}) + c(f; s_{201} s_{120} s_{111} s_{012}) = 0.$
$\varepsilon = (4,0,2)$, $c(f; s_{300} s_{102} s_{021}^2) + \frac{1}{2}c(f; s_{201}^2 s_{021}^2) = 0.$
$\varepsilon = (2,2,2)$, $c(f; s_{210} s_{201} s_{021} s_{012}) + c(f; s_{210} s_{120} s_{102} s_{012}) +$
$c(f; s_{210}^2 s_{012}^2) + \frac{1}{2}c(f; s_{210} s_{111}^2 s_{012}) = 0.$

したがって，$c(f; s_{120}^2 s_{102}^2) = -4$,
$c(f; s_{210} s_{111} s_{102} s_{021}) = c(f; s_{201} s_{120} s_{111} s_{012}) = -3.$
$c(f; s_{201}^2 s_{021}^2) = -4$, $c(f; s_{210} s_{111}^2 s_{012}) = 4.$

(6) $\varepsilon = (2,3,1)$,
$c(f; s_{210}s_{111}s_{102}s_{021}) + c(f; s_{120}s_{111}^2 s_{102}) + c(f; s_{201}s_{111}s_{102}s_{030}) = 0.$
$\varepsilon = (3,1,2)$,
$c(f; s_{201}s_{111}^2 s_{021}) + c(f; s_{300}s_{111}s_{021}s_{012}) + c(f; s_{210}s_{111}s_{102}s_{021}) = 0.$

したがって，$c(f; s_{120}s_{111}^2 s_{102}) = c(f; s_{201}s_{111}^2 s_{021}) = 4.$

(7) $\varepsilon = (2,2,2)$, $c(f; s_{201}s_{111}^2 s_{021}) + \frac{1}{2}c(f; s_{111}^4) +$
$c(f; s_{120}s_{111}^2 s_{102}) + c(f; s_{210}s_{111}^2 s_{012}) = 0.$
したがって，$c(f; s_{111}^4) = -24.$

すべての 25 個の係数が（スカラー倍を除いて）決定された．すなわち，$\dim K_{444} = 1$ である．実際に，f は $\sigma_3(\nu_3(\mathbb{P}^2))$ の定義多項式（Aronhold invariant）である．

- このプロセスは，与えられた k, d, n に対する**有限回**の計算であり，原理的には常に**手計算**でも実行可能である．
  このアイデアを発展させることで，生成元および K_β の次元を求めるための組合せ論的な手順を与えることができる．

定理 2 の証明の概略

1. $\mathbb{I}(\sigma_4(v_3(\mathbb{P}^3)))_5 = \bigoplus_{|\beta|=15} K_\beta$ について，組合せ論的な手順により，以下を得る．

$$\dim K_{(2,4,4,5)} = 1,\ \dim K_{(3,4,4,4)} = 3,\ \dim K_{(3,3,4,5)} = 1$$

また，$\beta \notin \mathfrak{S}_4\{(2,4,4,5),(3,4,4,4),(3,3,4,5)\}$ に対しては $K_\beta = 0$ である．これは以下を意味する．

$$\mathbb{I}(\sigma_4(v_3(\mathbb{P}^3)))_5 = \bigoplus_{\beta\in\mathfrak{S}_4\cdot(2,4,4,5)\cup\mathfrak{S}_4\cdot(3,4,4,4)\cup\mathfrak{S}_4\cdot(3,3,4,5)} K_\beta,$$

そして $\dim \mathbb{I}(\sigma_4(v_3(\mathbb{P}^3)))_5 = 1\times\frac{4!}{2!} + 3\times\frac{4!}{3!} + 1\times\frac{4!}{2!} = 36$ である．

2. Choe-Kwak の結果に基づき，$\dim \mathbb{I}(\sigma_4(v_3(\mathbb{P}^3)))_5 = 36$ は $\sigma_4(v_3(\mathbb{P}^3))$ が **del Pezzo 4-secant variety** であることを導く．36 個の 5 次式が ideal の minimal な生成元を与える．

5 次式の表現

$K_{(2,4,4,5)}$ の 5 次多項式は，以下の 10×10 交代行列の Pfaffian として得られる．

	3534	3543	3453	3444	3354	2544	2454	3345	3444	3435
3465	0	0	s_{0012}	0	s_{0111}	0	s_{1011}	s_{0120}	s_{0021}	s_{0030}
3456	0	0	s_{0003}	0	s_{0102}	0	s_{1002}	s_{0111}	s_{0012}	s_{0021}
3546	$-s_{0012}$	$-s_{0003}$	0	$-s_{0102}$	0	$-s_{1002}$	0	s_{0201}	s_{0102}	s_{0111}
3555	0	0	s_{0102}	0	s_{0201}	0	s_{1101}	s_{0210}	s_{0111}	s_{0120}
3645	$-s_{0111}$	$-s_{0102}$	0	$-s_{0201}$	0	$-s_{1101}$	0	s_{0300}	s_{0201}	s_{0210}
4455	0	0	s_{1002}	0	s_{1101}	0	s_{2001}	s_{1110}	s_{1011}	s_{1020}
4545	$-s_{1011}$	$-s_{1002}$	0	$-s_{1101}$	0	$-s_{2001}$	0	s_{1200}	s_{1101}	s_{1110}
3654	$-s_{0120}$	$-s_{0111}$	$-s_{0201}$	$-s_{0210}$	$-s_{0300}$	$-s_{1110}$	$-s_{1200}$	0	0	0
3555	$-s_{0021}$	$-s_{0012}$	$-s_{0102}$	$-s_{0111}$	$-s_{0201}$	$-s_{1011}$	$-s_{1101}$	0	0	0
3564	$-s_{0030}$	$-s_{0021}$	$-s_{0111}$	$-s_{0120}$	$-s_{0210}$	$-s_{1020}$	$-s_{1110}$	0	0	0

- 変数 s_{****} の添字 = 左のラベル − 上のラベル ($\cdots$ weight)
- Aronhold invariant もこの行列の 8×8 sub Pfaffian として現れる．

Remark & Question

1. $K_{(3,3,4,5)}$ の 5 次多項式もまた，10×10 交代行列の Pfaffian として得られる．
2. $K_{(3,4,4,4)}$ は 3 次元である．ある生成元 $G \in K_{(3,4,4,4)}$ が存在し，他の 2 つの生成元は G の変数を置換することで与えられる．
   G は「行列式と Pfaffian を用いた分数」として与えられる．
   - Q: もっと良い記述方法は存在するか？
3. Q: これらの 5 次式をもっと理論的な方法（Schur modules など）で記述できるか？