対称テンソル空間の部分代数多様体と射影幾何学の技法

joint work with Kangjin HAN (Daegu)

古川 勝久 (坂戸)
E-mail: katu@josai.ac.jp

第３０回沼津改め静岡研究会

Outline

1. 背景: Veronese 多様体の k-secant 多様体の研究
2. 結果: 特異点，ある特別な場合のイデアルの生成系
3. 射影幾何学のいろいろな技法で定理 1 を示す

1．背景：Veronese 多様体の k-secant 多様体の研究

射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ に対し，k-secant 多様体 $\sigma_k(X) \subset \mathbb{P}^N$ は，「X の k 個の点の張る $(k-1)$-平面の和集合」の Zariski 閉包として定まる．つまり，

$$\sigma_k(X) := \overline{\bigcup_{x_1, x_2, \ldots, x_k \in X} \langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle} \subset \mathbb{P}^N.$$

ここで，

- $\dim \sigma_k(X) \leqslant k \cdot \dim(X) + k - 1$
- "$<$" のとき，$\sigma_k(X)$ は **secant defective** であるという．

特異点に関しては，

$$\sigma_{k-1}(X) \subset \mathrm{Sing}(\sigma_k(X)).$$

- 左辺を $\sigma_k(X)$ の**自明な特異点集合**と呼ぼう．

どんなとき**非自明な特異点**は存在するか？

$\sigma_k(\nu_d(\mathbb{P}^n))$: Veronese 多様体の k-secant 多様体

V: $n+1$ 次元の $\mathbb{C}$-ベクトル空間.

d ベキ写像 $V \to S^d(V)$, $v \mapsto v^{\otimes d}$ を射影化し，d 次 Veronese 埋込み

$$\nu_d : \mathbb{P}^n = \mathbb{P}V \to \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1} = \mathbb{P}S^d(V)$$

を定める．その像 $\nu_d(\mathbb{P}^n) = \{ [v^{\otimes d}] \mid v \in V \}$ の k-secant 多様体 $\sigma_k(\nu_d(\mathbb{P}^n)) \subset \mathbb{P}S^d(V)$ について調べる.

別のいいかたをすると，
$\sigma_k(\nu_d(\mathbb{P}^n))$ は，「対称テンソル $[t] \in \mathbb{P}S^d(V)$ で (Waring) rank k のもの，つまり $t = v_1^{\otimes d} + \cdots + v_k^{\otimes d}$ $(v_1, \ldots, v_k \in V)$ と d ベキの k 個の和で書けるものの集合」の閉包としても捉えられる.

(参考) Landsberg, *Tensors: geometry and applications*

$\sigma_k(\nu_d(\mathbb{P}^n))$ の性質…次元・定義式・特異点

次元定理 (Alexander-Hirschowitz)

$\nu_d : \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^{\beta = \binom{m+d}{d} - 1}$ に対してつぎが同値となる:

1. $\sigma_k(\nu_d(\mathbb{P}^m))$ は $\neq \mathbb{P}^\beta$, かつ secant defective である.
2. $d = 2$ かつ $2 \leqslant k \leqslant m$, または
   $(k, d, m) = (7, 3, 4), (5, 4, 2), (9, 4, 3), (14, 4, 4)$ である.
   - なお，後者の 4 つは超曲面となる

- このように，$\sigma_k(\nu_d(\mathbb{P}^n))$ の次元がどうなるかは完全にわかっている.
- しかし，他の性質に関しては，特定の場合 (k, d, n が小さいときなど) にわかっているのみである.
  - つぎのページではそのあたりを見たい.

定義式・定義イデアル

- 古典的例: $\sigma_3(v_3(\mathbb{P}^2)) \subset \mathbb{P}^9$ は 4 次の超曲面となり，その定義多項式は **Aronhold invariant** と呼ばれる．Ottaviani は Schur module を用い，これを歪対称行列の Pfaffian として記述した．
- 発展として，Landsberg-Ottaviani により，定義式を表現論的に得る Young flattening の手法などを提起されている．
  - 例: $(k, d, n) = (6, 5, 2)$ (余次元 3) の定義イデアルの決定．

特異点

- 古典的結果: $n = 1$ あるいは $d = 2$ のとき，$\forall k$ で $\sigma_k(v_d(\mathbb{P}^n))$ に非自明な特異点は存在しない．
- Kanev: $k = 2$ の場合には，$\forall n, d$ で非自明な特異点が存在しない
- Han: $k = 3$ の場合は「$d = 4$ かつ $n \geqslant 3$」のときのみ**非自明な特異点が存在する**.

2．結果：特異点，ある特別な場合のイデアルの生成系

- $Y := \sigma_k(v_d(\mathbb{P}^n)) \subset \mathbb{P}^{N=\binom{n+d}{d}-1}$
- $S^{\mathrm{triv}} := \sigma_{k-1}(v_d(\mathbb{P}^n))$ (Y の自明な特異点集合)

さて，m-平面 $\mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^n$ に対し，

$$\sigma_k(v_d(\mathbb{P}^m)) \subset Y = \sigma_k(v_d(\mathbb{P}^n))$$

に注目する．

$\sigma_k(v_d(\mathbb{P}^m))$ の点で Y は特異的だろうか？

射影幾何の技法を用いて研究
Terracini's lemma, trisecant lemma, Gauss map (埋込み接空間の記述)，tangential projections, . . .

定理 1 ([1](arXiv:2111.03254) の Thm 2)

$k \geqslant 4,\ d \geqslant 3,\ n \geqslant 3$ および $2 \leqslant m < \min\{k-1, n\}$ について，

$$(d, m) \notin \mathcal{E} = \{(3,3), (3,4), (3,5), (4,2), (4,3), (4,4), (5,2), (6,2)\}$$

を要請する．このとき，

$(k, d, n) \neq (4, 3, 3)$ の場合，$\mu = \left\lceil \frac{\binom{m+d}{m}}{m+1} \right\rceil$ に対しつぎが成立する．

- **(i)** $k > \mu$ ならば，Y は $\sigma_k(\nu_d(\mathbb{P}^m))$ の一般点で滑らかである．
- **(ii)** $k = \mu$ ならば，$\sigma_k(\nu_d(\mathbb{P}^m))$ は**非自明な特異点**を与える．すなわち，$\sigma_k(\nu_d(\mathbb{P}^m)) \subset \mathrm{Sing}(Y)$ かつ $\sigma_k(\nu_d(\mathbb{P}^m)) \not\subset S^{\mathrm{triv}}$.
- **(iii)** $k < \mu$ ならば，$\sigma_k(\nu_d(\mathbb{P}^m)) \subset S^{\mathrm{triv}}$ である．

一方で，$(k, d, n) = (4, 3, 3)$ の場合にはつぎが成立する．

- **(iv)** $Y = \sigma_4(\nu_3(\mathbb{P}^3))$ は $\sigma_4(\nu_3(\mathbb{P}^2)) \setminus S^{\mathrm{triv}}$ の任意の点で滑らかである．

上に述べた他に，つぎの場合にも結果が得られている ([1] の Thm 1, 3).

- $m = 1$: とくに，Han の先行結果での非自明な特異点は

$$\mathrm{Sing}(\sigma_3(v_4(\mathbb{P}^n))) = \bigcup_{\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^n} \langle v_4(\mathbb{P}^1) \rangle$$

  と表現できる ($n \geqslant 3$).

- $(d, m) \in \mathcal{E}$: 下の表に対応し，(i), (ii), (iii) がなりたつ．

(d, m)	$\frac{\binom{m+d}{m}}{m+1}$	(i)	(ii)	(iii)
$(3, 3)$	5	$k \leqslant 5$	None	$6 \leqslant k$
$(3, 4)$	7	$k \leqslant 6$	$k = \mathbf{7, 8}$	$9 \leqslant k$
$(3, 5)$	28/3	$k \leqslant 8$	$k = \mathbf{9, 10}$	$11 \leqslant k$
$(4, 2)$	5	$k \leqslant 4$	$k = \mathbf{5, 6}$	$7 \leqslant k$
$(4, 3)$	35/4	$k \leqslant 7$	$k = \mathbf{8, 9, 10}$	$11 \leqslant k$
$(4, 4)$	14	$k \leqslant 13$	$k = \mathbf{14, 15}$	$16 \leqslant k$
$(5, 2)$	7	$k \leqslant 7$	None	$8 \leqslant k$
$(6, 2)$	28/3	$k \leqslant 8$	$k = \mathbf{9, 10}$	$11 \leqslant k$

例: $k = 4,\ d = 3$

$$\mathrm{Sing}(\sigma_4(v_3(\mathbb{P}^3))) = \sigma_3(v_3(\mathbb{P}^3))$$

$$\mathrm{Sing}(\sigma_4(v_3(\mathbb{P}^n))) = \bigcup_{\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^n} \langle v_3(\mathbb{P}^2) \rangle \quad (\forall n \geqslant 4)$$

とくに $n = 4$ を考える．
$\mathbb{P}^4 = \mathbb{P}\mathbb{C}^5$, $v_3(\mathbb{P}\mathbb{C}^5) \subset \mathbb{P}S^3\mathbb{C}^5$, $\langle v_3(\mathbb{P}^2) \rangle = \mathbb{P}S^2\mathbb{C}^3$

- $[f] \in \mathbb{P}S^3\mathbb{C}^5$ は 3 次超曲面 $X = (f = 0) \subset \mathbb{P}\mathbb{C}^5$ に対応する．
- 一般の $\sigma_4(v_3(\mathbb{P}^4))$ は，錐となる Fermat 超曲面 X で $\dim \mathrm{Vert}(X) = 0$.
- $\mathrm{Sing}(\sigma_4(v_3(\mathbb{P}^4)))$ に属する X は，$\dim \mathrm{Vert}(X) \geqslant 1$ となるような 3 次超曲面…錐の底として (任意の) 平面 3 次曲線がでてくる．

$\mathcal{E}$ の条件，identifiability と例外

- $\mathcal{E}$ の条件は，$\sigma_k(\nu_d(\mathbb{P}^m))$ の secant defectivity や，Galuppi-Mella・Chiantini-Ottaviani-Vannieuwenhoven による対称テンソルの **identifiability** の特徴づけに由来している．
  - じつは，(ii) の非自明な特異点の生じる状況は，$\sigma_k(\nu_d(\mathbb{P}^m))$ の**一般点が identifiable でない**ことに対応．
- (iv) のときは特別で，(ii) と同じく identifiable でないが，しかし**この時だけ非自明な特異点が生じない**.
  - それを示すため，この場合についての定義式を求めた．さらに次のことがわかった．

定理 2 ([2](arXiv:2410.00652))

1. $\sigma_4(v_3(\mathbb{P}^3)) \subset \mathbb{P}^{19}$ は **del Pezzo 4-secant 多様体**である．
   - とくに $\deg(\sigma_4(v_3(\mathbb{P}^3))) = 105$.
2. イデアル $\mathbb{I}(\sigma_4(v_3(\mathbb{P}^3)))$ は **36 個の 5 次多項式**により生成され，その極小自由分解は arithmetically Gorenstein となる．

$$0 \to S(-12) \to S(-7)^{36} \to S(-6)^{70} \to S(-5)^{36} \to \mathbb{I}(\sigma_4(v_3(\mathbb{P}^3))) \to 0$$

- 「del Pezzo k-secant 多様体」は Choe-Kwak により定義されたもので，Ciliberto-Russo の研究した「極小次数をもつ k-secant 多様体」につづく**次数の小さい多様体**となっている．
- arithmetically Gorenstein 多様体について，codimension $2, 3$ では，構造定理が知られている (Buchsbaum-Eisenbud). しかし，$\sigma_4(v_3(\mathbb{P}^3))$ は codimension 4 である…こうした多様体の新しい自然な例を与える．

5 次多項式の表示

$\mathbb{P}^{19} = \mathbb{P}S^3(\mathbb{C}^4)$ における 36 個の 5 次多項式は，まず 3 個の 5 次多項式を定めて，それらに S_4 の作用で対称な変数変換をすることで得られる: $36 = 3 \times \frac{24}{2}$

- たとえば，5 次多項式のうちのひとつは，
  次の 10×10 歪対称行列の Pfaffian として得られる．

$$
\begin{array}{c|cccccccccc}
 & 3534 & 3543 & 3453 & 3444 & 3354 & 2544 & 2454 & 3345 & 3444 & 3435 \\
\hline
3465 & 0 & 0 & s_{0012} & 0 & s_{0111} & 0 & s_{1011} & s_{0120} & s_{0021} & s_{0030} \\
3456 & 0 & 0 & s_{0003} & 0 & s_{0102} & 0 & s_{1002} & s_{0111} & s_{0012} & s_{0021} \\
3546 & -s_{0012} & -s_{0003} & 0 & -s_{0102} & 0 & -s_{1002} & 0 & s_{0201} & s_{0102} & s_{0111} \\
3555 & 0 & 0 & s_{0102} & 0 & s_{0201} & 0 & s_{1101} & s_{0210} & s_{0111} & s_{0120} \\
3645 & -s_{0111} & -s_{0102} & 0 & -s_{0201} & 0 & -s_{1101} & 0 & s_{0300} & s_{0201} & s_{0210} \\
4455 & 0 & 0 & s_{1002} & 0 & s_{1101} & 0 & s_{2001} & s_{1110} & s_{1011} & s_{1020} \\
4545 & -s_{1011} & -s_{1002} & 0 & -s_{1101} & 0 & -s_{2001} & 0 & s_{1200} & s_{1101} & s_{1110} \\
3654 & -s_{0120} & -s_{0111} & -s_{0201} & -s_{0210} & -s_{0300} & -s_{1110} & -s_{1200} & 0 & 0 & 0 \\
3555 & -s_{0021} & -s_{0012} & -s_{0102} & -s_{0111} & -s_{0201} & -s_{1011} & -s_{1101} & 0 & 0 & 0 \\
3564 & -s_{0030} & -s_{0021} & -s_{0111} & -s_{0120} & -s_{0210} & -s_{1020} & -s_{1110} & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

- 変数 s_{****} の添字 $=$ 左のラベル $-$ 上のラベル $(\cdots$ weight$)$

[1] K. Furukawa and K. Han, *On the singular loci of higher secant varieties of Veronese embeddings*, `arXiv:2111.03254`, to appear in Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal).

[2] K. Furukawa and K. Han, *On the prime ideals of higher secant varieties of Veronese embeddings of small degrees*, `arXiv:2410.00652`.

3．射影幾何学のいろいろな技法で定理１を示す

(ii) の非自明な特異点の生じる状況は，$\sigma_k(v_d(\mathbb{P}^m))$ の**一般点が identifiable でない**ことに対応．
さらに，つぎのどちらかの場合となる．

- $a \in \langle x_1, \ldots, x_k \rangle$ holds for k-tuples $x_1, \ldots, x_k \in v_d(\mathbb{P}^m)$ moving with **positive dimension**, i.e., $Incidence \to \sigma_k(v_d(\mathbb{P}^m))$ has positive dimensional fibers; or
- $a \in \langle x_1, \ldots, x_k \rangle$ holds for two of more **finitely many** k-tuples $x_1, \ldots, x_k$.

今日は最初の場合について議論する．

Terracini' lemma

定理 1 を背理法で示す．そのため，
$a \in \sigma_k(\nu_d(\mathbb{P}^m))$ で $Y = \sigma_k(\nu_d(\mathbb{P}^n))$ が非特異と設定する．

- すると，$\mathbb{T}_a Y$: $kn + k - 1$ 次元の埋込み接空間，を取れる．

For a k-tuple $x_1, \ldots, x_k \in \nu_d(\mathbb{P}^m)$ with $a \in \langle x_1, \ldots, x_k \rangle$, by **Terracini's lemma**, we have

$$\mathbb{T}_{x_i} \nu_d(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{T}_a Y.$$

⚠ a は Y の一般点でない⋯$\mathbb{T}_a Y$ は $\mathbb{T}_{x_i} \nu_d(\mathbb{P}^n)$ で決定しない．

- $x_i = \nu_d(x_i'),\ x_i' \in \mathbb{P}^m$.
- Fix $1 \leqslant i_0 \leqslant k$,
  $A_0 \subset \{ x_{i_0}' \in \mathbb{P}^m \mid a \in \langle x_1, \ldots, x_k \rangle \}$: 既約な成分
- $A = A_0 \cup \{ x_1', \ldots, x_k' \} \subset \mathbb{P}^m$.

ガウス写像

一般に，$X \subset \mathbb{P}^N$ に対して**ガウス写像** $X \dashrightarrow \mathbb{G}(\dim(X), \mathbb{P}^N)$ が $x \mapsto \mathbb{T}_x X$ により定まる．
いまは，$v_d(\mathbb{P}^m) \subset \mathbb{P}^{N=\binom{n+d}{d}-1}$ のガウス写像を計算する．

命題 3

$A \subset \mathbb{P}^m$: 閉部分多様体，$\Lambda \subset \langle v_d(\mathbb{P}^m) \rangle$: 線型多様体
このとき，線型多様体

$$\langle \Lambda \cup \bigcup_{x \in v_d(A)} \mathbb{T}_x(v_d(\mathbb{P}^n)) \rangle \subset \mathbb{P}^N$$

の次元は，つぎの数以上である:

$$\dim\langle \Lambda \cup v_d(A) \rangle + (n - m)\{1 + \dim\langle v_{d-1}(A) \rangle\}.$$

$\dim\langle v_{d-1}(A) \rangle$ はどのくらい大きいか？

Trisecant lemma

$\nu_{d-1} : \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^{\beta_{d-1}=\binom{m+d-1}{d-1}-1}$ に対し，**$(k-1)$-平面**

$$\langle \nu_{d-1}(x_1'), \ldots, \nu_{d-1}(x_k') \rangle \subset \langle \nu_{d-1}(A) \rangle \subset \mathbb{P}^{\beta_{d-1}}$$

の codimension を $c = \dim\langle \nu_{d-1}(A) \rangle - (k-1)$ とおく．
$\beta_{d-1} - m \geqslant k$ が成立するので，(generalized) **trisecant lemma** より，

$$\nu_{d-1}(\mathbb{P}^m) \cap \langle \nu_{d-1}(x_1'), \ldots, \nu_{d-1}(x_k') \rangle = \{ \nu_{d-1}(x_1'), \ldots, \nu_{d-1}(x_k') \}.$$

一方，intersection theory より，
$\nu_{d-1}(A_0) \cap \langle \nu_{d-1}(x_1'), \ldots, \nu_{d-1}(x_k') \rangle$ の (既約成分の) 次元 $\geqslant \dim(\nu_{d-1}(A_0)) - c$. まとめると，

$$\dim(\langle \nu_{d-1}(A) \rangle) \geqslant k - 1 + \dim(A_0)$$

じつは，つぎが必要！

$$\dim(\langle \nu_{d-1}(A) \rangle) \geqslant k + \dim(A_0)$$

Tangential projection

命題 4

$x'_1, \ldots, x'_k \in \mathbb{P}^m$: 一般点，$\nu_e : \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^{\beta_e = \binom{m+e}{m} - 1}$ を考える．
任意の **k-平面** $R \subset \mathbb{P}^{\beta_e}$ で

$$M := \langle \nu_e(x'_1), \nu_e(x'_2), \ldots, \nu_e(x'_k) \rangle$$

を含むものについて以下がなりたつ．

(i) $k \leqslant \beta_e - m$ をみたし，かつ，ある曲線 $C \subset R \cap \nu_e(\mathbb{P}^m)$ で $\nu_e(x'_1)$ を通るものが存在するなら，次がなりたつ:

$$R \subset \langle \nu_e(x'_2), \ldots, \nu_e(x'_k), \mathbb{T}_{\nu_e(x'_1)} \nu_e(\mathbb{P}^m) \rangle.$$

(ii) $e \geqslant 3$ かつ $k \leqslant \beta_e - 2m$ のとき，

$$\dim_{\nu_e(x'_1)} (R \cap \nu_e(\mathbb{P}^m)) = 0.$$

(∵) (i) $k \leqslant \beta_e - m$ をみたすなら，trisecant lemma より

$$M \cap v_e(\mathbb{P}^m) = \{v_e(x_1'), v_e(x_2'), \ldots, v_e(x_k')\}.$$

とくに $C \not\subset M$.

- 線型射影 $\pi = \pi_{\langle v_e(x_2'),\ldots,v_e(x_k')\rangle} : \mathbb{P}^{\beta_e} \dashrightarrow \mathbb{P}^{\beta_e - k+1}$ を取る．ここで，$\pi(v_e(x_1')) \in \pi(C) \subset \mathbb{P}^{\beta_e-k+1}$.

もし $\pi(C) = \{pt\}$ なら，$\pi(C) = \pi(v_e(x_1'))$, つまり $C \subset M$ となるが，これは矛盾．よって $\pi(C)$ は曲線である．

- k-平面 $R \subset \mathbb{P}^{\beta_e}$ に対し，$\pi(R)$ は $\mathbb{P}^{\beta_e-k+1}$ の直線である．よって，$\pi(C) = \pi(R)$. さらに，

$$\pi(C) = \pi(R) = \mathbb{T}_{\pi(v_e(x_1'))}\pi(R) \subset \mathbb{T}_{\pi(v_e(x_1'))}\pi(v_e(\mathbb{P}^m))$$

$x_1' \in \mathbb{P}^m$ は一般点なので，右辺は $\pi(\mathbb{T}_{v_e(x_1')}v_e(\mathbb{P}^m))$ に一致する．それゆえ，R は $\pi(\mathbb{T}_{v_e(x_1')}v_e(\mathbb{P}^m))$ の逆像に含まれる．

(ii) **tangential projection**

$$\pi_{\mathbb{T}_{\nu_e(x_1')}\nu_e(\mathbb{P}^m)} : \mathbb{P}^{\beta_e} \dashrightarrow \mathbb{P}^{\beta_e - m - 1},$$

と，その制限 $\tilde{\pi} = \pi_{\mathbb{T}_{\nu_e(x_1')}\nu_e(\mathbb{P}^m)}|_{\nu_e(\mathbb{P}^m)}$ とを取る．

- もしも $\dim_{\nu_e(x_1')}(R \cap \nu_e(\mathbb{P}^m)) > 0$ なら，(i) をみたす曲線 C を取れることになる．このとき，

$$\tilde{\pi}(R \cap \nu_e(\mathbb{P}^m)) \subset \tilde{\pi}(\nu_e(\mathbb{P}^m)) \cap \langle \tilde{\pi}(\nu_e(x_2')), \dots, \tilde{\pi}(\nu_e(x_k')) \rangle. \tag{1}$$

$\operatorname{codim}(\tilde{\pi}(\nu_e(\mathbb{P}^m)), \mathbb{P}^{\beta_e - m - 1}) - (k-1)$ は
$(\beta_e - 2m - 1) - (k-1) \geqslant 0$ なので，trisecant lemma により (1) の右辺は $k-1$ 点の集合に含まれる．よって，ある l について，

$$\tilde{\pi}(C) = \tilde{\pi}(\nu_e(x_l')).$$

$e \geqslant 3$ について $\sigma_2(\nu_e(\mathbb{P}^m))$ は non-defective で，
$\tilde{\pi}$ は **generically finite** となる．これは矛盾である． ■