レポート解説 基礎数学 B

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (西暦２０１５年度後期)

No. 8 (２０１６年1月6日 (水) 出題，１月１２日 (火) 締切)

8-1

$(X, \mathcal{O})$ を連結な位相空間とし，$f : X \to \mathbf{R}$ を連続関数とする．ある点 $a, b \in X$ について $f(a) < f(b)$ とする．このとき，$[f(a), f(b)] \subset f(X)$ を示せ．(つまり，任意の $c' \in \mathbf{R}$, $f(a) \leq c' \leq f(b)$, に対して，$c \in X$ が存在して，$f(c) = c'$ が成り立つ．)

（ヒント：位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が「連結でない」$\iff \exists U_1, U_2 \in \mathcal{O}, X = U_1 \cup U_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset, U_1 \neq \emptyset, U_2 \neq \emptyset.$)

（注：問題 8-1 の主張は，いわゆる中間値の定理（の一般化）である．）

8-2

次の問いに答えよ．

(1) $\mathbf{R}$ はコンパクトでないことを（定義から直接）証明せよ．

(2) $\mathbf{R}$ の部分集合 $A = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\} \cup \{0\}$ がコンパクトであることを（定義から直接）証明せよ．(ヒント：A の任意の開被覆を考える)

8-3

次の問いに答えよ．

(1) 位相空間 X の部分集合 A について，次の条件 (a) (b) は互いに同値であることを証明せよ．

(a) A に X からの相対位相を入れたとき，A がコンパクト位相空間である．

(b) X の開集合族 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ を満たすとき（つまり，A の開被覆について），有限個の $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_k}$ を選んで，$A \subset V_{\lambda_1} \cup \cdots \cup V_{\lambda_k}$ とできる．(つまり，A は X のコンパクト部分集合である．)

(2) 位相空間 X の部分集合 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ がすべてコンパクトであるならば，その和集合 $\bigcup_{n=1}^{k} A_n$ も X のコンパクト部分集合となることを証明せよ．

問題 8-1，問題 8-2，問題 8-3，は全て，概念の定義をしっかり確認しながら解けば解ける問題です．基本的な用語や概念は，定義を何度も使って確認して，十分に身につけるようにしてください．

問題 8-1 の解答例．

X が連結で f が連続だから，$f(X)$ は $\mathbf{R}$ の連結部分集合である．$f(a), f(b) \in f(X)$ である．仮に，$[f(a), f(b)] \not\subset f(X)$ を仮定して矛盾を導く．$\exists c', f(a) \leq c' \leq f(b), c' \notin f(X)$ とおく．$c' \neq f(a), c' \neq f(b)$ である．$V_1 = (-\infty, c'), V_2 = (c', \infty)$ とする．このとき，
V_1, V_2 は $\mathbf{R}$ の開集合であり，$f(X) \subset V_1 \cup V_2, f(X) \cap V_1 \cap V_2 = \emptyset$ であり，さらに，
$f(X) \cap V_1 \neq \emptyset, f(X) \cap V_2 \neq \emptyset$ が成り立つ．
実際，$f(a) \in f(X) \cap V_1$ であり，$f(b) \in f(X) \cap V_2$ である．
これは，$f(X)$ が連結集合であることに矛盾する．したがって，$[f(a), f(b)] \subset f(X)$ が成り立つ．

問題 8-2 の解答例．

(1)
$n \in \mathbf{N}$ に対し，$U_n = (-\infty, n) \subset \mathbf{R}$ とおく．すると，$\{U_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ は $\mathbf{R}$ の開被覆となる．$\mathbf{R} = \cup_{n \in \mathbf{N}} U_n$ である．$\{U_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ から有限個の $U_{n_1}, \ldots, U_{n_p}$ を選んで，$\mathbf{R} = U_{n_1} \cup \cdots \cup U_{n_p}$ と覆うことはできない．なぜなら，もし覆えるとすると，$N = \max\{n_1, \ldots, n_p\}$ とおくと，$\mathbf{R} \subset U_{n_1} \cup \cdots \cup U_{n_p} = U_N = (-\infty, N)$ となり矛盾が導かれるからである．
よって，$\mathbf{R}$ はコンパクトではい．

(2)
A の**任意の**開被覆 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ $(A \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha, V_\alpha$ は $\mathbf{R}$ の開集合$)$ をとる．
ある $\alpha_0 \in \Lambda$ があって，$0 \in U_{\alpha_0}$ となる．U_{α_0} は開集合であるから，$\delta > 0$ があって，$(-\delta, \delta) \subset U_{\alpha_0}$ と

なる．$k \in \mathbf{N}$ を $\frac{1}{k} < \delta$ となるようにとれば，$n \geq k$ ならば $\frac{1}{n} \in U_{\alpha_0}$ となる．一方，$n = 1, 2, \ldots, k-1$ に対しては，それぞれ，$\frac{1}{n} \in U_{\alpha_n}$ となる $\alpha_n \in \Lambda$ が存在する．このとき，

$$A \subset U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \cdots \cup U_{\alpha_{k-1}} \cup U_{\alpha_0}$$

となる．このように有限部分被覆が存在する．したがって，A はコンパクトである．

問題 8-3 の解答例.
(1) (a) $\Longrightarrow$ (b) を示す.
A の X における**任意の**開被覆 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ($A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$, V_λ は X の開集合) をとる．$A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda}(V_\lambda \cap A)$ である．$V_\lambda \cap A$ は相対位相に関して，A の開集合であり，$\{V_\lambda \cap A\}_{\lambda \in \Lambda}$ は A の A における開被覆である．A はコンパクト空間であるから，有限個の $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ が存在して，$A \subset V_{\lambda_1 \cap A} \cup \cdots \cup V_{\lambda_p \cap A}$ となる．
このとき，$A \subset V_{\lambda_1} \cup \cdots \cup V_{\lambda_p}$ が成り立つ．したがって，A はコンパクト部分集合である．
(b) $\Longrightarrow$ (a) を示す.
A の A における**任意の**開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ($A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, U_λ は A の開集合) をとる．U_λ は A の開集合であるから，X の開集合 V_λ があって，$U_\lambda = V_\lambda \cap A$ となる．このとき，$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ である．A はコンパクト部分集合だから，有限個の $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ が存在して，$A \subset V_{\lambda_1} \cup \cdots \cup V_{\lambda_p}$ となる．このとき，$A = (V_{\lambda_1} \cap A) \cup \cdots \cup (V_{\lambda_p} \cap A) = U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_p}$ となる．したがって，A はコンパクト位相空間である．
(2)
$\bigcup_{n=1}^k A_n$ の**任意の**開被覆 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ (つまり，$\bigcup_{n=1}^k A_n \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$, V_λ は X の開集合) をとる．このとき，各 A_n に対し，$\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は，A_n の開被覆であり，A_n はコンパクトであるから，有限集合 $\Lambda_n \subset \Lambda$ が存在して，$A_n \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda_n} V_\lambda$ が成り立つ．このとき，$\Lambda' := \bigcup_{n=1}^k \Lambda_n \subset \Lambda$ は有限集合であり，$\bigcup_{n=1}^k A_n \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} V_\lambda$ となる．すなわち，$\bigcup_{n=1}^k A_n$ の任意の開被覆が有限部分開被覆をもつ．したがって，$\bigcup_{n=1}^k A_n$ はコンパクトである．

以上