レポート解説 基礎数学Ｂ

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (西暦２０１５年度後期)

No. 7 (２０１５年１２月１６日 (水) 出題，１２月２２日 (火) 締切)

7-1 X を位相空間とし，$\mathcal{O}$ を X の開集合系とする．

$$\mathcal{F} := \{E \subset X \mid E^c \in \mathcal{O}\}$$

と定める．ただし，$E^c = X \setminus E$ は補集合を表す．このとき，次が成り立つことを示せ．

(1) $\emptyset \in \mathcal{F}, X \in \mathcal{F}$.

(2) $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$ ならば $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{F}$.

(3) $E_\beta \in \mathcal{F}, (\beta \in \Lambda)$ ならば $\bigcap_{\beta \in \Lambda} E_\beta \in \mathcal{F}$.

(ちなみに，$\mathcal{F}$ を X の閉集合系とよぶ.)

7-2

次の問いに答えよ．

(1) 位相空間 X の部分集合 A が稠密 (ちゅうみつ，dense) とはどういう意味か，定義を述べよ．

(2) 位相空間 X の２つの稠密な開集合 U_1, U_2 の共通部分 $U_1 \cap U_2$ は稠密な開集合であることを示せ．

7-3

次の問いに答えよ．

(1) 位相空間 X の点 $x \in X$ が部分集合 A の触点とはどういう意味か？また A の閉包 $\overline{A}$ とは何か？それぞれ定義を述べよ．

(2) 位相空間 X の部分集合 A が連結であるとはどういう意味か，定義を述べよ．

(3) 位相空間 X の部分集合 A が連結ならば閉包 $\overline{A}$ は連結であることを示せ．

問題 7-1，**問題 7-2**，**問題 7-3** は，概念の定義をしっかり押さえていけば解ける問題です．ただし，**問題 7-3** は，背理法を用いないと，解くのは難しいので，解きづらかったかも知れません．ともかく，皆さん，だいたい良くできているようです．

問題 7-1 の解答例.

(1)

$\emptyset^c = X \in \mathcal{O}$ だから，$\emptyset \in \mathcal{F}$.

$X^c = \emptyset \in \mathcal{O}$ だから，$X \in \mathcal{F}$.

(2)

$E_1, E_2 \in \mathcal{F}$ である．$E_1^c \in \mathcal{O}$ であり，$E_2^c \in \mathcal{O}$ である．よって，$E_1^c \cap E_2^c \in \mathcal{O}$ である．$E_1^c \cap E_2^c = (E_1 \cup E_2)^c$ であるから，$E_1 \cup E_2 \in \mathcal{F}$ が成り立つ．

(3) $E_\beta \in \mathcal{F}$ とする．$E_\beta^c \in \mathcal{O}$ である．したがって，$\bigcup_{\beta \in \Lambda} E_\beta^c \in \mathcal{O}$ である．$\bigcup_{\beta \in \Lambda} E_\beta^c = \left(\bigcap_{\beta \in \Lambda} E_\beta\right)^c$ であるから，$\bigcap_{\beta \in \Lambda} E_\beta \in \mathcal{F}$ が成り立つ．よって，

問題 7-2 の解答例.

(1)

X の部分集合 A が稠密であるとは,「$\overline{A} = X$」が成り立つこと，すなわち,「任意の $x \in X$ が A の触点であること」すなわち,「任意の $x \in X$ と任意の X の開集合 U について，$x \in U$ ならば $U \cap A \neq \emptyset$」が成り立つことである．

(2)

U_1, U_2 を X の稠密な開集合とする．$x \in X, U$ を X の開集合とする．U_1 が稠密なので $U \cap U_1 \neq \emptyset$ である．$y \in U \cap U_1$ が存在する．このとき，$U \cap U_1$ は X の開集合であり，U_2 が稠密だから，$(U \cap U_1) \cap U_2 = U \cap (U_1 \cap U_2) \neq \emptyset$ である．よって，$U_1 \cap U_2$ は稠密である．また，$U_1 \cap U_2$ は開集合である．したがって，$U_1 \cap U_2$ は稠密な開集合である．

問題 7-3 の解答例.

(1)

$x \in X$ が A の触点とは,「X の任意の開集合 U について，$x \in U$ ならば，$U \cap A \neq \emptyset$」が成り立つことである．

また，$\overline{A}$ は 「A の触点全体のなす集合」である．

(2)

位相空間 X の部分集合 $A \subset X$ が連結であるとは,「$A \subset U_1 \cup U_2$, U_1, U_2 が X の開集合で，$A \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ならば，$A \cap U_1 = \emptyset$ または $A \cap U_2 = \emptyset$」が成り立つことである．

(3)

$\overline{A}$ が連結でないと仮定して矛盾を導く．

$\overline{A}$ が連結でないとする．すると，X の開集合 U, V で，$\overline{A} \subset U \cup V$, $\overline{A} \cap U \cap V = \emptyset$, $\overline{A} \cap U \neq \emptyset$ かつ $\overline{A} \cap V \neq \emptyset$ となるものが存在する．

$\overline{A} \cap U \neq \emptyset$ だから，$x \in \overline{A} \cap U$ となる x が存在する．x は A の触点であり，$x \in U$ である．したがって，$A \cap U \neq \emptyset$ である．

$\overline{A} \cap V \neq \emptyset$ だから，$y \in \overline{A} \cap V$ となる y が存在する．y は A の触点であり，$y \in V$ である．したがって，$A \cap V \neq \emptyset$ である．

さらに，$A \subset U \cup V$ で，$A \cap U \cap V = \emptyset$ である．これは，A は連結であることに矛盾する．

したがって，背理法により，$\overline{A}$ は連結である．