# レポート解説 基礎数学B

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (西暦２０１５年度後期)

# No. 6 (２０１５年１２月４日(金) 出題，１２月１０日(木) 締切)

## 6-1

$X_0 = \mathbf{R}_{\geq 0}$ を 0 以上の実数のなす集合とし，通常の数の大小で順序を入れる．直積集合 $X = X_0 \times X_0$ に $X_0$ の大小関係から辞書式順序を入れる．$X$ の部分集合 $E, F$ を

$$\begin{aligned} E &:= \{(x, y) \in X \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, \\ F &:= \left\{(x, y) \in X \mid y = \frac{1}{1-x},\ 0 < x < 1\right\} \end{aligned}$$

によって定める．次の問いに答えよ．

(1) $E, F$ を図示せよ．

(2) $E, F$ の上限，下限，最大元，最小元を求めよ．

## 6-2

順序集合の間の写像 $f : (X, \preceq_1) \to (Y, \preceq_2)$ が順序と保つとは，$\forall x, x' \in X$ に対し，$x \preceq_1 x' \Rightarrow f(x) \preceq_2 f(x')$ が成り立つことである．また $f$ が順序同型写像であるとは，$f$ が全単射で，$f$ が順序を保ち，逆写像 $f^{-1}$ も順序を保つときに言う．また，$\mathbf{N}$ や $\mathbf{Q}$ の通常の順序を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\mathbf{N}$ から $\mathbf{N}$ への順序同型写像は，恒等写像に限ることを示せ．

(2) $\mathbf{N}$ から $\mathbf{Q}$ への順序同型写像は存在しないことを示せ．

## 6-3

写像 $\Psi : (0, 1) \times (0, 1) \to \mathbf{R}$ を $x = 0.a_1a_2a_3\cdots$ （2 進展開）で $y = 0.b_1b_2b_3\cdots$ （2 進展開）のとき，

$$\Psi(x, y) := 0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\cdots \text{(2 進展開)}$$

により定める．次を示せ．

(1) $\Psi$ は単射である．

(2) $\mathrm{Card}((0, 1) \times (0, 1)) = \aleph$.

(3) $\mathbf{R}^2$ の空でない開集合の濃度は $\aleph$ に等しい．

---

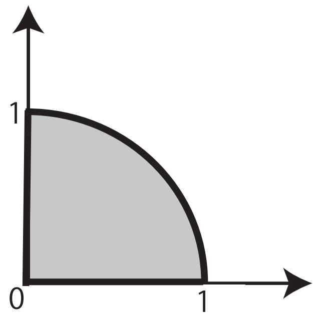
**問題 6-1** は，特に $F$ の上限，下限が考えづらかったかも知れません．定義をもう一度確認しておきましょう．

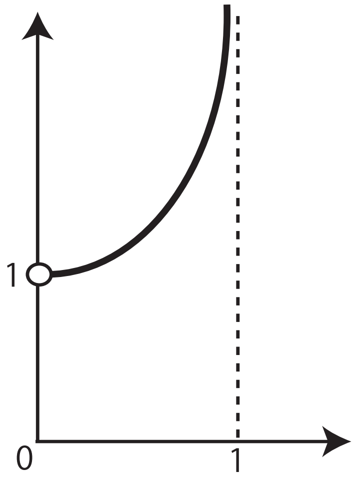
**問題 6-2** は，比較的よく出来ていたと思います．いろいろな解法があるので，なるべく多くの別解を下に紹介しました．

**問題 6-2** の (3) はなかなか難しい問題でした．$\mathbf{R}^2$ の開集合というと，ものすごく複雑な図形もあるので，すべての場合に具体的な全単射を与えることは無理です．したがって，Bernstein の定理を応用することが問題解決の重要なアイディアになります．

**問題 6-1 の解答例．**

(1)




(2) $E$ の最大元 $(1,0)$ 最小元 $(0,0)$, 上限 $(1,0)$, 下限 $(0,0)$.
実際，$E$ の上界は，$\{(x,y) \mid 1 \le x,\ 0 \le y\}$ で与えられる．その最小元が存在して $(1,0)$ に等しいので，上限は $(1,0)$ である．しかも $(1,0) \in E$ であるから，$(1,0)$ は $E$ の最大元である．$E$ の下界は，$\{(0.0)\}$ である．したがって，その最大元 $(0,0)$ が $E$ の下限であり，最小元である．

$F$ の最大元は存在しない．最小元も存在しない．上限は $(1,0)$，下限は存在しない．
実際，$F$ の上界は $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \le x,\ 0 \le y\}$ であるから，上界の最小元 $(1,0)$ が $F$ 上限である．$(1,0) \notin F$ だから，$F$ の最大元は存在しない．
$F$ の下界は $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 0, 0 \le y\}$ である．$x > 0$ のとき，$(x,y)$ は $F$ の下界に属さないからである．$F$ の点 $(\frac{x}{2}, \frac{1}{1-\frac{x}{2}})$ の方が $(x,y)$ より（辞書式順序で）小さいからである．
したがって，$F$ の下界に最大元はないので，$F$ の下限は存在しない．$F$ の最小元も存在しない．

**問題 6-2 の解答例.**
(1)
$f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ を順序同型写像とする．$f(1) \in \mathbf{N}$ は $\mathbf{N}$ の最小元である．
なぜなら,（$f$ が全射だから）任意の $m \in \mathbf{N}$ に対し，$n \in \mathbf{N}$ が存在して，$m = f(n)$ となる．$1 \le n$ であり $f$ が順序を保つから $f(1) \le f(n) = m$ となるからである．
よって $f(1) = 1$ である．
次に $f(2)$ を考える．$f$ が単射だから，$f(2) \neq 1$ である．上と同様の議論で，$f(2)$ は $\mathbf{N} \setminus \{1\}$ の最小元であり，$f(2) = 2$ がわかる．
以下同様に考えて，$f$ が恒等写像であることがわかる．
以上の説明を数学的帰納法を用いて，より厳密に書いてみよう．
$n \in \mathbf{N}$ に関する次の命題を数学的帰納法で証明する：
$P(n)$ : $1 \le i \le n$ である任意の $i \in \mathbf{N}$ に対し，$f(i) = i$.
$P(1)$ が成り立つことは，上に示した通りである．
$n = k$ のとき，$P(k)$ が成り立つと仮定する．
$P(k+1)$ を考える．$f$ が単射であるから，$f(k+1) \notin \{1, 2, \dots, k\}$ である．$f$ が全射であり，順序を保つから，$k+1 \le m$ である任意の $m \in \mathbf{N}$ に対し，$f(k+1) \le m$ である．したがって，$f(k+1)$ は $\mathbf{N} \setminus \{1, 2, \dots, k\}$ の最小元である．したがって，$f(k+1) = k+1$ である．よって，$P(k+1)$ が成り立つ．
数学的帰納法により，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して，$P(n)$ が成り立つ．
したがって，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して，$f(n) = n$ が成り立つ．
したがって，$f$ は恒等写像である．
**別解.** $f$ が恒等写像でないと仮定して矛盾を導く．$f$ が恒等写像でないと仮定し，

$$A := \{m \in \mathbf{N} \mid f(m) \neq m\}$$

とおく．仮定より $A \neq \emptyset$ である．$A$ の最小元を $n$ とする．$n$ の最小性から，$1 \le i \le n-1$ である任意の $i$ について，$f(i) = i$ が成り立つ．$f$ の単射性から，$n - 1 \le f(n)$ で $f(n) \neq n$ だから，

$n+1 \le f(n)$ となる．$f$ の全射性から $n = f(m)$ となる $m \in \mathbf{N}$ が存在するが，$m \notin \{1, 2, \ldots, n-1\}$ だから $n \le m$ となるはずである．$f$ は順序を保つから，$f(n) \le f(m)$ したがって，$n+1 \le n$ が導かれる．これは矛盾である．したがって，$A = \emptyset$ である．よって，$f$ は恒等写像である．

(2)
**解１．**（$\mathbf{Q}$ に最小元が存在しないことを使った証明.）
順序同型写像 $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Q}$ が存在したとする．$f(1) \in \mathbf{Q}$ に対し，$r \in \mathbf{Q}$ が存在して，$r < f(1)$ となる．(たとえば，$r = f(1) - 1$ と取る.）$f$ は全射だから，$r = f(n)$ となる $n \in \mathbf{N}$ が存在する．$1 \le n$ で，$f$ は順序を保つから，$f(1) \le f(n)$ となる．すると，$f(1) \le r$ となり，$r < f(1)$ に矛盾する．したがって，背理法により，$\mathbf{N}$ から $\mathbf{Q}$ への順序同型写像は存在しない.
**解２．**（$\mathbf{Q}$ の異なる２元の間に他の元がある，という性質を使った証明.）
順序同型写像 $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Q}$ が存在したとする．$f$ は順序を保ち，単射であるから，$f(1) < f(2)$ である．$r = \frac{f(1)+f(2)}{2}$ とおくと，$r \in \mathbf{Q}$ である．$f(1) < r < f(2)$ である．$f$ は全射だから，$r = f(n)$ となる $n \in \mathbf{N}$ が存在する．$f$ は単射だから，$n \neq 1, n \neq 2$ である．つまり，$2 < n$ である．よって，$f(2) \le f(n) = r$ である．これは，$r < f(2)$ に矛盾する．したがって，背理法により，$\mathbf{N}$ から $\mathbf{Q}$ への順序同型写像は存在しない.

**問題 6-3 の解答例.**
(1)
$\Psi(x, y) = 0.a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \cdots$ とし，$\Psi(x', y') = 0.a'_1 b'_1 a'_2 b'_2 a'_3 b'_3 \cdots$ とし，$\Psi(x, y) = \Psi(x', y')$ とする．このとき，２進展開の一意性から，$a_1 = a'_1, b_1 = b'_1, a_2 = a'_2, b_2 = b'_2, a_3 = a'_3, b_3 = b'_3, \ldots$ である．$\Psi$ の定義から，$x' = 0.a'_1 a'_2 a'_3 \cdots, y' = 0.b'_1 b'_2 b'_3 \cdots$ である．したがって，$x = x', y = y'$ となる．したがって，$\Psi$ は単射である.
**注.** $\Psi((0,1) \times (0,1)) = (0,1)$ ではない．$z = 0.101010\cdots$（２進展開）とすると，$z \in (0,1)$ だが，$\Psi(x, y) = z$ となるような $(x, y) \in (0,1) \times (0,1)$ は存在しない.
(2)
(1) から，濃度に関する順序（一方から他方に単射が存在するという順序）について，$\mathrm{Card}((0,1) \times (0,1)) \le \mathrm{Card}(\mathbf{R}) = \aleph$ が成り立つ．一方，$\Phi : \mathbf{R} \to (0,1) \times (0,1)$ を，$\Phi(x) := (\mathrm{Tan}^{-1}(\frac{\pi}{2}(x-1)), 0)$ と定めれば，$\Phi$ は単射である.(単射の作り方はいろいろある.）したがって，$\aleph = \mathrm{Card}(\mathbf{R}) \le \mathrm{Card}((0,1) \times (0,1))$ が成り立つ．よって Bernstein の定理により，$\mathrm{Card}((0,1) \times (0,1)) = \aleph$ が成り立つ.
(3)
$U \subset \mathbf{R}^2$ を任意の空でない開集合とする．$z = (x_0, y_0) \in U$ とする．$U$ は開集合だから $\varepsilon > 0$ が存在して，$B(z, \varepsilon) \subset U$ となる．そこで，$f : (0,1) \times (0,1) \to U$ を，$f(x, y) := (x_0 + \varepsilon(x - \frac{1}{2}), y_0 + \varepsilon(y - \frac{1}{2}))$ とおけば，$f$ は単射となる.(単射の作り方はいろいろある.）したがって，濃度の不等式 $\mathrm{Card}((0,1) \times (0,1)) \le \mathrm{Card}(U)$ が成り立つ.
一方，$g : U \to (0,1) \times (0,1)$ を $g(x, y) := \left(\mathrm{Tan}^{-1}(\frac{\pi}{2}(x-1)), \mathrm{Tan}^{-1}(\frac{\pi}{2}(y-1))\right)$ と定まると，$g$ は単射である.(単射の作り方はいろいろある.）したがって，濃度の不等式 $\mathrm{Card}(U) \le \mathrm{Card}((0,1) \times (0,1))$ が成り立つ．よって，Bernstein の定理により，濃度の等式 $\mathrm{Card}(U) = \mathrm{Card}((0,1) \times (0,1))$ が成り立つ．よって，(2) から $\mathrm{Card}(U) = \aleph$ が成り立つ. □