レポート解説 基礎数学Ｂ

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (西暦２０１５年度後期)

No. 5 (２０１５年１１月２５日(水) 出題，１２月１日(火) 締切)

5-1

X を実数列全体のなす集合とする．X の上の 2 項関係 R を，X の要素 $a = (a_k)_{k=1}^{\infty}, b = (b_k)_{k=1}^{\infty}$ に対して，

$$aRb \overset{\text{def.}}{\iff} \text{たかだか有限個の } k \text{ を除くと } a_k = b_k \text{ が成り立つ}$$

により定義する．R が X の上の同値関係になることを示せ．

5-2

$X = \mathcal{P}(\mathbf{N}) \setminus \{\emptyset\} = \{A \mid A \subset \mathbf{N}, A \neq \emptyset\}$ （$\mathbf{N}$ の空でない部分集合の全体の集合）とおく．X の上の 2 項関係 $\sim$ を，$A, B \in X$ に対し，

$$A \sim B \overset{\text{def.}}{\iff} A \text{ と } B \text{ の最小の元が一致する}$$

により定義する．このとき $\sim$ が同値関係であることを示し，商集合がどのような集合であるか考察せよ．

5-3

X, Z を集合とし，$\sim$ を X 上の同値関係とする．写像 $f : X \to Z$ に対し次の２条件は互いに必要十分条件であることを示せ．
(i) $\forall x, x' \in X, (x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x'))$.
(ii) 写像 $\overline{f} : X/\!\sim\, \to Z$ で，$\overline{f} \circ \pi = f$ を満たすものが存在する．
　ただし，$X/\!\sim$ は X の $\sim$ に関する商集合（剰余集合），すなわち，$\sim$ に関する同値類の全体の集合，であり，$\pi : X \to X/\!\sim$ は自然な射影，すなわち，$\pi(x) = [x]$ （$x \in X$ に x が属する同値類を対応させる）とする．

問題 5-1, 問題 5-2 の同値関係であることの証明は，皆さんよくできていました．**問題 5-3** については，授業でも説明しましたが，解答例を記しておきましょう．

問題 5-1 の解答例.
(i) $a \in X$ とする．任意の k について，$a_k = a_k$ であるから，aRa.
(ii) $a, b \in X$, aRb とする．たかだか有限個の k を除いて，$a_k = b_k$ であるから，$b_k = a_k$ が成り立つ．したがって，bRa.
(iii) $a, b, c \in X$, aRb, bRc とする．有限集合 $E_1 \subset \mathbf{N}$ があって，$k \notin E_1$ ならば，$a_k = b_k$ が成り立つ．また，有限集合 $E_2 \subset \mathbf{N}$ があって，$k \notin E_2$ ならば，$b_k = c_k$ が成り立つ．このとき，$E_1 \cup E_2 \subset \mathbf{N}$ は有限集合であって，$k \notin E_1 \cup E_2$ ならば，$a_k = c_k$ が成り立つ．したがって，aRc.
以上により，R は同値関係である．

問題 5-2 の解答例. $\min A$ で，A の最小元を表すことにする．
(i) $A \in X$ とする．$\min A = \min A$ だから，$A \sim A$.
(ii) $A, B \in X, A \sim B$ とする．$\min A = \min B$ であるから，$\min B = \min A$ である．したがって $B \sim A$.
(iii) $A, B, C \in X, A \sim B, B \sim C$ とする．$\min A = \min B, \min B = \min C$ だから，$\min A = \min C$. よって $A \sim C$.
以上により，$\sim$ は同値関係である．
$A \in X$ とする．このとき，ただ 1 つの $\mathbf{N}$ の要素からなる集合 $\{\min A\}$ に対して，$A \sim \{\min A\}$ である．したがって，

$$X/\!\sim\; = \{[\{n\}] \mid n \in \mathbf{N}\} = \{[\{1\}], [\{2\}], [\{3\}], \dots\}$$

である．ただし，$[\cdot]$ は同値類を表す．いま，写像 $\varphi : \mathbf{N} \to X/\sim$ を $\varphi(n) = [\{n\}]$ で定めると，φ は全単射である．したがって，$X/\sim$ は可算無限集合である．
（もちろん，考察にはいろいろある．皆さんがんばっていろいろ考察してください.）

問題 5-3 の解答例.

(i) $\Longrightarrow$ (ii). (i) を仮定する．このとき，$\overline{f} : X/\sim \to Z$, を $[x] \in X/\sim$ に対し，$\overline{f}([x]) := f(x)$ で定める．$[x] = [x']$ のとき，$x \sim x'$ であるから，条件 (i) から $f(x) = f(x')$ である．したがって，$\overline{f}$ は写像である．(代表元の取り方に依らず写像が定まる)．さらに，任意の $x \in X$ に対し，$(\overline{f} \circ \pi)(x) = \overline{f}([x]) = f(x)$ であるから，$\overline{f} \circ \pi = f$ が成り立つ，したがって (ii) が成り立つ.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). (ii) を仮定する．$x \sim x'$ とする．このとき，$[x] = [x']$ である．すると，$f(x) = (\overline{f} \circ \pi)(x) = \overline{f}([x]) = \overline{f}([x']) = (\overline{f} \circ \pi)(x') = f(x')$ が成り立つ．したがって (i) が成り立つ.

以上により，(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) である.