レポート解説 基礎数学B

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (西暦２０１５年度後期)

No. 4 (２０１５年１０月３０日 (金) 出題，１１月５日 (木) 締切)

4-1

(X, d) を距離空間とし，$A \subset X$ を部分集合とする．このとき，$\overline{A} = ((A^c)^\circ)^c$ （閉包は，補集合の内部の補集合に等しいこと）を示せ．

4-2

集合 X の任意の２点 x, y に対し，実数 $\rho(x, y)(\geq 0)$ がそれぞれ定められ，
(1) $\forall x, y \in \mathbf{R}^n,\ \rho(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y$，かつ，(2) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}^n, \rho(x, y) \leq \rho(z, x) + \rho(z, y)$
が成り立つとき，ρ は，(3) $\forall x, y,\ \rho(x, y) = \rho(y, x)$ という性質も持つ（したがって，d は距離関数の定義をすべて満たす）ことを示せ．

4-3

距離空間 $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ に対し，直積集合 $X = X_1 \times X_2$ を考え，関数 $d : X \times X \to \mathbf{R}$ および $d' : X \times X \to \mathbf{R}$ をそれぞれ

$$d(x, y) := \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}, \quad d'(x.y) := d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

$(x = (x_1, y_1),\ y = (x_2, y_2) \in X)$ によって定める．次の問いに答えよ．
(1) $d : X \times X \to \mathbf{R}$ は X 上の距離関数であることを示せ．
(2) $d' : X \times X \to \mathbf{R}$ は X 上の距離関数であることを示せ．
(3) ２つの距離空間 (X, d) と (X, d') について，恒等写像 $f = \mathrm{id}_X : (X, d) \to (X, d')$ は連続写像であることを示せ．(すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在して，$B_d(x, \delta) \subset B_{d'}(x, \varepsilon)$ が成り立つことを示せ．ただし，$B_d(x, \delta)$ は距離 d に関する点 x の δ 近傍を表す.)

4-3 問題文訂正

距離空間 $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ に対し，直積集合 $X = X_1 \times X_2$ を考え，関数 $d : X \times X \to \mathbf{R}$ および $d' : X \times X \to \mathbf{R}$ をそれぞれ

$$d(x, y) := \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}, \quad d'(x.y) := d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

$(x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in X)$ によって定める．次の問いに答えよ．
(1) $d : X \times X \to \mathbf{R}$ は X 上の距離関数であることを示せ．
(2) $d' : X \times X \to \mathbf{R}$ は X 上の距離関数であることを示せ．
(3) ２つの距離空間 (X, d) と (X, d') について，恒等写像 $f = \mathrm{id}_X : (X, d) \to (X, d')$ は連続写像であることを示せ．(すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在して，$B_d(x, \delta) \subset B_{d'}(x, \varepsilon)$ が成り立つことを示せ．ただし，$B_d(x, \delta)$ は距離 d に関する点 x の δ 近傍を表す.)

問題 4-1 は，Euclid 空間でも成り立つ等式ですが，それを，一般の距離空間で，距離関数の性質だけを用いて（もちろん，閉包とか内部，補集合の定義に基づいて）示すことがキーポイントになります．

問題 4-2 も抽象的な距離関数の定義に関する復習問題です．

問題 4-3 は，距離空間の直積に距離を導入する方法に関する問題です．

問題 4-1 の解答例.
$x \in X$ について，$x \in \overline{A} \iff \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \iff \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \not\subset A^c \iff (\exists \delta >$

$0, B(x,\delta) \subset A^c)$ でない $\Longleftrightarrow (x \in (A^c)^\circ)$ でない $\Longleftrightarrow x \in ((A^c)^\circ)^c$ したがって，$\overline{A} = x \in ((A^c)^\circ)^c$ が成り立つ. $\square$

上と同様の論法で，等式 $(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$ を示してもよい.

もちろん，$\overline{A} \subset x \in ((A^c)^\circ)^c$ と $\overline{A} \supset x \in ((A^c)^\circ)^c$ の両方を示してもよい.

問題 4-2 の解答例.
条件 (2) を $z = y$ の場合にあてはめると，特に，任意の $x, y \in X$ に対し，

$$\rho(x,y) \leq \rho(y,x) + \rho(y,y)$$

が成り立つ．さらに条件 (1) より，$\rho(y,y) = 0$ なので，任意の $x, y \in X$ に対して，

$$\rho(x,y) \leq \rho(y,x)$$

が成り立つ．x, y の任意性から，任意の $x, y \in X$ に対して，

$$\rho(y,x) \leq \rho(x,y)$$

も成り立つ．したがって，任意の $x, y \in X$ に対して，

$$\rho(y,x) = \rho(x,y)$$

すなわち，条件 (3) が満たされる. $\square$

問題 4-3 の解答例.
(1)
d の正値性．$d(x,y) \leq 0$ は明らか.
$d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow d_1(x_1,y_1)^2 + d_2(x_2,y_2)^2 = 0 \Longleftrightarrow d_1(x_1,y_1) = 0$ かつ $d_2(x_2,y_2) = 0 \Longleftrightarrow x_1 = y_1$かつ $x_2 = y_2 \Longleftrightarrow x = y$ も成立.
d の対称性.
$d(x,y) = \sqrt{d_1(x_1,y_1)^2 + d_2(x_2,y_2)^2} = \sqrt{d_1(y_1,x_1)^2 + d_2(y_2,x_2)^2} = d(y,x)$ となり成立.
d に関する三角不等式.
$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ を示す.
d_1, d_2 に関する三角不等式から，$d(x,z) \leq \sqrt{(d_1(x_1,y_1) + d_1(y_1,z_1))^2 + (d_2(x_1,y_1) + d_2(y_1,z_1))^2}$ が成り立つ．記号の煩雑さを避けるため，
$a_1 = d_1(x_1,y_1), b_1 = d_1(y_1,z_1), a_2 = d_2(x_2,y_2), b_2 = d_2(y_2,z_2)$ とおく.（これらはすべて非負実数）.
すると，$d(x,z) \leq \sqrt{(a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2}$ が成り立つ．いま，$\boldsymbol{a} = (a_1,b_1), \boldsymbol{b} = (b_1,b_2)$ とおけば，$\mathbf{R}^2$ における通常のノルムの性質を用いて，

$$d(x,z) \leq |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = d(x,y) + d(y,z)$$

が成り立つことがわかる.
(2) d' の正値性．$d_1(x_1,y_1) \geq 0, d_2(x_2,y_2) \geq 0$ だから，$d'(x,y) \geq 0$. さらに，$d'(x,y) = 0 \Longleftrightarrow d_1(x_1,y_1) = 0$ かつ $d_2(x_2,y_2) = 0 \Longleftrightarrow x_1 = y_1$かつ $x_2 = y_2 \Longleftrightarrow x = y$ となり成立.
d' の対称性.
$d'(x,y) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2) = d_1(y_1,x_1) + d_2(y_2,x_2) = d'(y,x)$ となり成立.
d' に関する三角不等式.
$d'(x,z) = d_1(x_1,z_1) + d_2(x_2,z_2) \leq d_1(x_1,y_1) + d_1(y_1,z_1) + d_2(x_2,y_2) + d_2(y_2,z_2) \leq d'(x,y) + d'(y,z)$ となり成立.
(3) 任意の $\delta > 0$ に対し，$B_d(x,\delta) \subset B_{d'}(x,2\delta)$ が成り立つことを示す.
$y \in B_d(x,\delta)$ とする．$d(x,y) < \delta$ である．したがって，$d_1(x_1,y_1) < \delta, d_2(x_2,y_2) < \delta$ である．したがって，$d'(x,y) < 2\delta$ である.
そこで，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ とおけば，$B_d(x,\delta) \subset B_{d'}(x,\varepsilon)$ が成り立つ.

問題 4-3 が解けた人は，次の問題も自然に思い浮かぶだろうし，容易に解決できるだろう．
問題 4-3 の続き．

問題 4-3 (4) 2つの距離空間 (X,d) と (X,d') について，恒等写像 $\mathrm{id}_X : (X,d') \to (X,d)$ は連続写像であることを示せ．(すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在して，$B_{d'}(x,\delta) \subset B_d(x,\varepsilon)$ が成り立つことを示せ．)

ヒント：定義域と値域の距離が (3) と入れ替わっていることに注意．今度は，$\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ とおけばよい．

問題 4-3 の (3)(4) から，距離空間 (X,d) と距離空間 (X,d') は，位相空間として**同相**であることがわかる．