レポート解説 基礎数学B

担当 石川 剛郎(いしかわ ごうお) (西暦２０１５年度後期)

No. 3 (２０１５年１０月２１日(水) 出題, １０月２７日(火) 締切)

3-1

写像 $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ を，$n \in \mathbf{N}$（0 でない自然数）に対し，

$$f(n) := (n \text{ を } 2 \text{ 進法表示したときに現れる } 1 \text{ の数}),$$

によって定める．たとえば，5 は２進法で表示すると “101” だから $f(5) = 2$ である．このとき,「任意の $p, q \in \mathbf{N}$ に対し，ある $n \in \mathbf{N}$ があって，$f(n) = p, n \geq q$」（つまり，全射であり，しかも，$f^{-1}(\{p\})$ が非有界）という条件が成り立つことを示せ．

3-2

$n \in \mathbf{N}$ とし，$X = \{1, 2, \ldots, n\}$ とする．次の問いに答えよ．
(1) X から X への全単射は，全部で何個あるか説明せよ．
(2) 全単射 $f : X \to X$ に対し，ある $m \in \mathbf{N}$ が存在して，$f^m = f \circ \cdots \circ f$（$m$ 個の合成）が恒等写像になることを示せ．

3-3

$n \in \mathbf{N}$ とする．$A = (0, 1) \cup (1, 2) \cup \cdots \cup (n-1, n)$ の $\mathbf{R}$ における閉包 $\overline{A}$ を求めよ．

問題 3-1 は，写像の問題（全射と逆像に関する問題）ですが，２進法の意味が実際に理解できているかどうかがキーポイントになります．

問題 3-2 も写像の問題（有限集合上の全単射の問題，写像の合成の問題，逆写像の問題）です．(1) は皆さんよくできていました．(2) はいろいろな解答がありましたが，説明が難しい場合もありましたね．

問題 3-3 は，閉包の意味を理解しているかどうかの問題ですが，論理的に厳密な推論を期待していました．

問題 3-1 の解答例
任意の $p \in \mathbf{N}$ に対し，

$$n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_p},$$

ただし，$a_1 < a_2 < \cdots < a_p$ かつ $a_i \in \mathbf{N}(1 \leq i \leq p)$, とおくと，$f(n) = p$ が成り立つ．また，任意の $q \in \mathbf{N}$ に対して，上のような n として，とくに，$a_1 = q, a_2 = q+1, \ldots, a_n = p+q-1$ とおくと，

$$n = 2^q + \cdots + 2^{q+1} + \cdots + 2^{p+q-1},$$

となり，$n \in f^{-1}(\{p\})$ かつ $n \geq 2^q \geq q$ となる．

問題 3-2 の解答例
(1) X から X への全単射 f について，1 の行き先 $f(1)$ は n 通り．2 の行き先は，$f(1)$ 以外の $n-1$ 通り．3 の行き先は，$f(1), f(2)$ 以外の $n-2$ 通り．と順次見て行くと，全部で $n!$ 通りあることがわかる．したがって，X から X への全単射は，全部で $n!$ 個．
(2) 任意の $i \in \mathbf{N}$ に対して，f の合成 $f^i = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (i 個の合成）も X から X への全単射となる．したがって，(1) の考察から，$n! + 1$ 個の写像

$$f, f^2, \ldots, f^{n!}, f^{n!+1}$$

には，等しいものが少なくとも 1 対ある．すなわち，$i, j \in \mathbf{N}, 1 \leq i < j \leq n! + 1$ があって，

$$f^i = f^j$$

となる．両辺に f の逆写像 f^{-1} の i 回合成 f^{-i} を合成させると，

$$\mathrm{id}_X = f^{-i} \circ f^i = f^{-i} \circ f^j = f^{j-i}$$

となる．すなわち，$m \in \mathbf{N}$ が存在して，$m \leq n!$ かつ $f^m = \mathrm{id}_X$ を満たす．

問題 3-3 の解答例．

$\overline{A} = [0, n]$ を示す．

まず $\overline{A} \supset [0, n]$ を示す．$x \in [0, n]$ とする．$x \in A$ ならば $\overline{A}$ は明らか．$x \in \{0, 1, \ldots, n\}$ とする．$x = i$ とおく．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$B(x, \varepsilon) \cap A = (i - \varepsilon, i + \varepsilon) \cap A$ は，開区間 $(i - \varepsilon', i)$ または $(i, i + \varepsilon')$ を含む．ただし，$\varepsilon' = \min\{1, \varepsilon\}$ である．($i = 0, n$ の場合も考慮した述べ方をしている.)
よって，$B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ であり，$x \in \overline{A}$ となる．

次に，$\overline{A} \subset [0, n]$ を示す．そのために，$x \notin [0, n]$ とする．すなわち，$x \in (-\infty, 0) \cup (n, \infty)$ とする．$x < 0$ のとき，$\delta = -\frac{x}{2} > 0$ とおくと，$B(x, \delta) \cap A = \emptyset$ である．また，$n < x$ のときは，$\delta = \frac{x-n}{2} > 0$ とおけば，$B(x, \delta) \cap A = \emptyset$ である．したがって，$x \notin \overline{A}$ である．よって，$\overline{A} \subset [0, n]$ が成り立つ．