レポート解説 基礎数学B

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (西暦２０１５年度後期)

No.2 (２０１５年１０月９日 (金) 出題，１０月１５日 (木) 締切)

2-1 X, Y を集合，$f : X \to Y$ を写像とし，A' を Y の部分集合とするとき，$f(f^{-1}(A')) = A' \cap f(X)$ を示せ．

2-2 X, Y を集合，$f : X \to Y$ を写像とし，A を X の部分集合とするとき，$f^{-1}(f(A)) \supset A$ を示せ．また，$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2, A = [0, 1]$ （ゼロイチ区間）という例について，$f(A)$ および $f^{-1}(f(A))$ を求め，$f^{-1}(f(A)) \neq A$ となることを確認せよ．

2-3 (1) 写像 $f : X \to Y$ について，f のグラフを $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$ で定義する．
２つの写像 $f, g : X \to Y$ について，$\Gamma_f = \Gamma_g$ （集合の相等） $\iff$ $f = g$ （写像の相等）という同値性が成立することを証明せよ．
(2) 写像 $f : X \to Y$ に対して，$\Gamma_f^{-1} := \{(f(x), x) \in Y \times X \mid x \in X\}$ とおく．いま，写像 $g : Y \to X$ について，$\Gamma_f^{-1} = \Gamma_g$ が成り立っているとするとき，f, g はどういう関係にあるか述べよ．

問題 2-1 問題 2-2 は皆さんよく出来ていました．**問題 2-3** は，とくに (1) は，どう説明するか戸惑った人も多かったかもしれません．何はともあれ，定義に基づいて着実に一歩一歩説明することを期待した問題です．詳しい説明が付けられないということは，物事をよく理解していない，あるいは，理解がまだ明確に言語化されていない，ということになります．着実な説明ができれば，その後，それを適宜省略して簡潔な説明ができるようになるわけです．

問題 2-1 の解答例

(1) $f(f^{-1}(A')) \subset A' \cap f(X)$ を示す．$y \in f(f^{-1}(A'))$ とする．ある $x \in f^{-1}(A')$ が存在して，$y = f(x)$．このとき，（逆像の定義から）$f(x) \in A'$．よって，$y \in A'$ かつ $y \in f(X)$．よって，$y \in A' \cap f(X)$．
次に，$f(f^{-1}(A')) \supset A' \cap f(X)$ を示す．$y \in A' \cap f(X)$ とする．$y \in f(X)$ たから，ある $x \in X$ が存在して，$y = f(x)$ となる．このとき，$f(x) \in A'$ だから $x \in f^{-1}(A')$ である．したがって，$y \in f(f^{-1}(A'))$ である．

問題 2-2 の解答例

(1) $a \in A$ とする．像の定義から $f(a) \in f(A)$ なので，逆像の定義から，$a \in f^{-1}(f(A))$ となる．したがって，$A \subset f^{-1}(f(A))$ が分かる．
(2) $f(A) = [0, 1]$ であり，$f^{-1}(f(A)) = \{x \in X \mid x^2 \in [0, 1]\} = [-1, 1]$ となるから，$f^{-1}(f(A)) \neq A$ である．

問題 2-3 の解説． $f = g \Rightarrow \Gamma_f = \Gamma_g$ はグラフの定義から明らかですが，$\Gamma_f = \Gamma_g \Rightarrow f = g$ はそれほど自明ではありません．
ところで，$\{(x, f(x)) \in x \in X\} = \{(x, g(x)) \in x \in X\}$ から，任意の $x \in A$ について $(x, f(x)) = (x, g(x))$ ということを導いているレポートを見かけましたが，推論に飛躍があります．（結論はもちろん正しいのですが．）このような推論は，たとえば，

$$\{n \mid n \in \mathbf{Z}\} = \{n + 1 \mid n \in \mathbf{Z}\} \ (= \mathbf{Z})$$

から $n = n + 1$ を導いているのと同じような（見た目に捕われた）推論です．このような推論は不合理であり正しくないですね．

問題 2-3 の解答例.

(1) 「$\Gamma_f = \Gamma_g \Leftarrow f = g$」: $f = g$ すなわち，任意の $x \in X$ について $f(x) = g(x)$ とする．まず，$\Gamma_f \subset \Gamma_g$ を示す．任意の $(x, f(x)) \in \Gamma_f$ をとる．$f(x) = g(x)$ だから，$(x, f(x)) = (x, g(x)) \in \Gamma_g$ となる．したがって，$\Gamma_f \subset \Gamma_g$ が成り立つ．$\Gamma_f \supset \Gamma_g$ も全く同様に示される.（あるいは，対称性から明らか.）

「$\Gamma_f = \Gamma_g \Rightarrow f = g$」: $\Gamma_f = \Gamma_g$ とする．任意の $x \in X$ について，$(x, f(x)) \in \Gamma_f$ だから $(x, f(x)) \in \Gamma_g = \{(x, g(x)) \mid x \in X\}$．よって，$x' \in X$ が存在して $(x, f(x)) = (x', g(x'))$．すると，$x = x', f(x) = g(x')$．したがって，任意の $x \in X$ に対し，$f(x) = g(x)$ が成り立つ．$f = g$ が成り立つ.（ここでは，$\Gamma_f \subset \Gamma_g$ という条件だけを使っていることに注意.）

(2) 条件 $\Gamma_f^{-1} = \Gamma_g$ より，

$$\{(f(x), x) \mid x \in X\} = \{(y, g(y)) \mid y \in Y\}$$

が成り立つ．

任意の $x \in X$ について，ある $y \in Y$ が存在して，$(f(x), x) = (y, g(y))$ となる．このとき，$f(x) = y$ かつ $x = g(y)$．よって，任意の $x \in X$ について，$x = g(f(x))$ が成り立つ．したがって，$g \circ f = \mathrm{id}_X$ である.（ちなみに，この時点で f の単射性と g の全射性が示されている.）

一方，任意の $y \in Y$ に対して，ある $x \in X$ が存在して，$(f(x), x) = (y, g(y))$ となる．このとき，$f(x) = y$ かつ $x = g(y)$．よって，任意の $y \in Y$ について，$f(g(y)) = y$ が成り立つ．したがって，$f \circ g = \mathrm{id}_Y$ である.（ちなみに，この時点で f の全射性と g の単射性が示されている.）

したがって，f は全単射であり,（逆写像の定義から）g は f の逆写像である.（もちろん，f は g の逆写像である.）