# レポート解説 基礎数学B

担当 石川 剛郎(いしかわ ごうお) (西暦２０１５年度後期)

## レポート No. 1 (２０１５年１０月２日（金）出題，１０月８日（木）締切)

**1-1.** $P, Q$ を命題とする．次の問いに答えよ．
(1) 命題「$P \Rightarrow Q$」が真になるのはどういう場合に限るか（$\Rightarrow$ の定義にしたがって）説明せよ．
(2) 命題「$P \Rightarrow Q$」の否定命題「$(P \Rightarrow Q)$ でない」が，命題「$P$ かつ $(Q$ でない$)$」と同値となること，(つまり，真偽をともにすること）を説明せよ．(講義の説明をもとに，自分自身の言葉で説明してください）．
**1-2.** 集合 $A, B, C \subset X$ について， 等式

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

が成り立つことを示せ．(講義の説明をもとに，自分自身の言葉で，なるべく論理的にていねいに説明してください.）．
**1-3.** $\mathbf{R}$ の部分集合の族 $A_1, A_2, \dots, A_m, \dots$ を $A_m = (m-1, m]$ （半開区間），$(1 \leq m)$ により定めるとき，

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = (0, \infty), \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (1 \leq i < j)$$

を示せ．(図示しながら，なるべく詳しい説明を付けてください.)

---

**問題 1-1** は,「形式論理」の問題．命題「$P \Rightarrow Q$」や「$(P \Rightarrow Q)$ でない」や「$P$ かつ $(Q$ でない$)$」が，それぞれ，

**命題 $P$ の真偽 (しんぎ) と命題 $Q$ の真偽だけで，その真偽が決まる**

ということを理解することがキーポイントになります．つまり，全部でたった４通りの場合分けで定義されるということ，$P$ や $Q$ が具体的にどんな命題なのかを気にする必要がない，ということを理解することが重要です．このことはすべての数学の基礎になるのでしっかり押さえておきましょう．
命題「$P \Rightarrow Q$」は，$P$ が真であり，かつ，$Q$ が偽でのとき，そのときだけ偽です．他の３通りの組み合わせ（$P$ 真，$Q$ 真；$P$ 偽，$Q$ 真； $P$ 偽，$Q$ 偽）の場合はいずれも「$P \Rightarrow Q$」は真になります．このことと「$P$ かつ $(Q$ でない$)$」の真偽を比べればよいのです．(他の説明の仕方もあります．とにかく,「命題」の真偽ということについて理解できているかどうかが重要です.)

ところで，数学の定理は，通常「$P \Rightarrow Q$」の形をしています．$P$ が前提で，$Q$ が結論です．定理は，$P$ が真の場合に，$Q$ が真であることを保証します．$P$ の真偽にかかわらず（つまり前提が成立しているかどうかにかかわらず）真である命題が定理「$P \Rightarrow Q$」です．一方，結論 $Q$ の真偽は，前提 $P$ の真偽によって変わり得ます．
通常，定理「$P \Rightarrow Q$」の前提や結論には，いくつかの**変数** (variable, 数とは限りません．集合や写像になる場合も多くあります) が入っています：「$P(x, y, \dots) \Rightarrow Q(x, y, \dots)$」．一例をあげると「$x, y$ が実数で $x^2 + y^2 = 0$ ならば $x = 0, y = 0$」という命題は，そのような形をしています．(定理というほど大げさなものではないですが，真である命題です）．この場合，$P(x, y, \dots)$ は $(x, y$ が実数で $x^2 + y^2 = 0)$ という命題であり，$Q(x, y, \dots)$ は $(x = 0, y = 0)$ という命題です．$x, y$ によって，$P$ の真偽は変わりますね．$Q$ の真偽も変わりますね．でも,「$P \Rightarrow Q$」は $x, y$ にかかわらず真な命題です．

**問題 1-2** は，集合が等しい，ということに関する問題です．よくできていました．一応，解答例を書いておきます：
**解答例.** まず，左辺 $\subset$ 右辺を示す．$x \in (A \cap B) \cup C$ とする．$x \in A \cap B$ または $x \in C$ で

ある．$x \in A \cap B$ のとき，$x \in A$ かつ $x \in B$ であるから，$x \in A \cup C$ かつ $x \in B \cup C$ となり，$x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ となる．$x \in C$ のときも $x \in A \cup C$ かつ $x \in B \cup C$，よって，$x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$．いずれにせよ，$x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ が成り立つ．よって，左辺 $\subset$ 右辺が成り立つ．
次に左辺 $\supset$ 右辺を示す．$x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ とする．$x \in A \cup C$ かつ $x \in B \cup C$ である．よって，$(x \in A$ または $x \in C)$ かつ $(x \in B$ または $x \in C)$ である．$x \in C$ のとき，$x \in (A \cap B) \cup C$ である．$x \notin C$ のとき，$x \in A$ かつ $x \in B$ すなわち $x \in A \cap B$ となり，$x \in (A \cap B) \cup C$ となる．したがって $x \in (A \cap B) \cup C$ となる．よって，左辺 $\supset$ 右辺 が成り立つ．
以上により与えられた等式が成り立つ．

**問題 1-3** も集合が等しい，ということを示す問題です．具体的な問題を論理的に説明するのは，かえって難しいかったようですが，そのトレーニングという趣旨の問題です．まず解答例を書きます：
**解答例.** まず，命題 $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = (0, \infty)$ を示す．$\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = \{x \mid \exists m \in \mathbf{N}, x \in A_m\}$ が定義である．
$x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ とする．$\exists m \in \mathbf{N}, x \in A_m$ であり，$A_m \subset \mathbf{R}$ であるから，$x \in (0, \infty)$ したがって，$\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \subset (0, \infty)$ は明らかである．
逆に $x \in (0, \infty)$ とする．$x$ は正の実数であるから，正整数 $m$ が存在して，$m - 1 < x \leq m$ となる．すなわち $x \in A_m$ である．よって，$x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ となる．したがって，$\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \supset (0, \infty)$ である．
次に命題 $A_i \cap A_j = \emptyset \quad (1 \leq i < j)$ を示す．$1 \leq i < j$ とする．($A_i \cap A_j \supset \emptyset$ は明らかである．$A_i \cap A_j \subset \emptyset$ を示すために,) $\exists x \in A_i \cap A_j$ と仮定して矛盾を導く．$i < j$ で，$i, j$ は整数だから，$i \leq j - 1$ であるから，$i - 1 < x \leq i \leq j - 1 < x \leq j$ であり，$x < x$ となり矛盾である．したがって，$\exists x \in A_i \cap A_j$ は偽，すなわち，$A_i \cap A_j \subset \emptyset$ となり，$A_i \cap A_j = \emptyset$ が示される．
**補足解説.** 上の解答例は,「ていねいすぎる解答」と言えます．でも今回は，(基礎数学 B の講義の趣旨を考え）**論理的な推論の再確認・再トレーニング**という意味合いで例示しています．通常は，適宜省略して説明しますが，必要があれば省略しないで説明できなければいけません．解答の数学的キーポイントは,「$x$ は正の実数であるから，正整数 $m$ が存在して，$m - 1 < x \leq m$ となる」という部分です.「**アルキメデスの原理**により」という答案が多かったですね．もちろんその通りですが,「**原理**」という名前がついていますが，要するに「**実数の構成・定義**」(整数から有理数を作ってそれから実数を構成すること）から従う「**定理**」ですね．また，$m = [x] + 1$ ($[x]$ はガウス記号，$x$ を超えない最大の整数）ととれ，と書いてもよいです．問題 3-1 の前半部の解答例の短縮形は,「正の実数 $x$ に対して，正整数 $m$ が存在して，$m - 1 < x \leq m$ となるから成り立つ」という具合になります．(ただし，今回のレポートの場合は「説明不足」と判定されるでしょう.)
それから，$\bigcup_{m=1}^{n} A_m = (0, n]$ だから，“$n \to \infty$” として，

$$“ \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = \lim_{n \to \infty} \bigcup_{m=1}^{n} A_m = (0, \infty) ”$$

と論じているレポートも多かったです．$\bigcup_{m=1}^{n} A_m = (0, n]$ の部分は正しいし，その後の**発想自体はそれほど悪くない**と私も思いますが，**多くの難点**を抱えている説明になります．まず，第一に，最初の等式の根拠が不明（級数の和のアナロジー？)，第二に，中辺の「集合（区間）の極限」の定義が不明，第三に，2 番目の等式の根拠が不明，ということで，残念ながらこのままでは**論理的な欠陥**が沢山あることになります．(この場合,「集合の極限」は，もし定義するとしたら，特性関数（補足問題 9 参照）の極限として定められるかもしれません．とにかく，おもしろいけれども議論の余地がたくさんあります.)