基礎数学B講義演習プリント・出席確認

担当 石川 剛郎(いしかわ ごうお) (2015年度後期)

No.9 西暦2015年10月28日(水2)

学生番号 **氏名** 解答例

9-1. (X,d) を距離空間，$A, C \subset X$ とする．このとき，$\overline{A \cup C} = \overline{A} \cup \overline{C}$ を示せ．

$\supset$ を示す．$A \cup C \supset A$ より $\overline{A \cup C} \supset \overline{A}$．

$A \cup C \supset C$ より $\overline{A \cup C} \supset \overline{C}$ よって $\overline{A \cup C} \supset \overline{A} \cup \overline{C}$

$\subset$ を示す．

$x \in \overline{A \cup C}$ とし，$x \notin \overline{A}$ かつ $x \notin \overline{C}$ とする．

$x \notin \overline{A}$ だから $\exists \delta_1 > 0$, $B(x, \delta_1) \cap A = \emptyset$

$x \notin \overline{C}$ だから $\exists \delta_2 > 0$ $B(x, \delta_2) \cap C = \emptyset$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと

$B(x, \delta) \cap (A \cup C) = \emptyset$

よって $x \notin \overline{A \cup C}$ 矛盾

したがって $x \in \overline{A}$ または $x \in \overline{C}$ つまり $x \in \overline{A} \cup \overline{C}$ //

9-2. (X,d) を距離空間，$x \in X, r > 0$ とする．$B(x,r) = \{y \in X \mid d(y,x) < r\}$ が X の開集合であることを示せ．

$y \in B(x,r)$ とする．$d(y,x) < r$ である

$\delta = r - d(y,x) \ (>0)$ とおく

$B(y,\delta) \subset B(x,r)$ である．

なぜなら $z \in B(y,\delta)$ とすると

$d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) < \delta + d(y,x) = r$ よって $z \in B(x,r)$．

したがって y は $B(x,r)$ の内点 よって $B(x,r)$ は X の開集合

≪「数学の仕組み」に関するメモ≫

1. $A \cup C \supset A$ だから $\overline{A \cup C} \supset \overline{A}$ が成り立つ．$A \cup C \supset C$ だから $\overline{A \cup C} \supset \overline{C}$ が成り立つ．したがって，$\overline{A \cup C} \supset \overline{A} \cup \overline{C}$ は成り立つ．

$\overline{A \cup C} \subset \overline{A} \cup \overline{C}$ を示すために，$x \in \overline{A \cup C}$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$B(x,\varepsilon) \cap (A \cup C) \neq \emptyset$ である．したがって，$B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ または $B(x,\varepsilon) \cap C \neq \emptyset$ はわかる．ただし，ε によって，$B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ なのか $B(x,\varepsilon) \cap C \neq \emptyset$ なのかは定まらない．こういう場合は背理法を適用するとよい．$x \notin \overline{A} \cup \overline{C}$ と仮定する．つまり，$x \notin \overline{A}$ かつ $x \notin \overline{C}$ とする．すると，$\delta > 0$ が存在して，$B(x,\delta) \cap A = \emptyset$ となる．また，$\delta' > 0$ が存在して，$B(x,\delta') \cap C = \emptyset$ となる... といった論法で矛盾を導くことができる．

2. $y \in B(x,r)$ とする．y が $B(x,r)$ の内点であることを示す．

コラム. (1) $0 < s < r$ のとき，$B(x,s) \subset B(x,r)$ が成り立つ．(2) $D \cup E = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x\} \subset \mathbf{R}$ のとき，$0 \in \overline{D}$ または $0 \in \overline{E}$ が成り立つ．(1) は明らか．(2) は次のように示すことができる．$0 \notin \overline{D}$ かつ $0 \notin \overline{E}$ と仮定する．$\delta > 0$ が存在して，$(-\delta, \delta) \cap D = \emptyset$ となる．また $\delta' > 0$ が存在して，$(-\delta', \delta') \cap E = \emptyset$ となる．$\delta'' = \min\{\delta, \delta'\}$ とすれば，$(-\delta'', \delta'') \cap (D \cup E) = \emptyset$ となり，$(-\delta'', \delta'') \cap (D \cup E) = (-\delta'', \delta'') \cap \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x\} = (0, \delta'') \neq \emptyset$ に矛盾する．したがって，背理法により (2) が示される．