基礎数学B講義演習プリント・出席確認

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (２０１５年度後期)

No. 8　西暦２０１５年１０月２３日（金２）

学生番号　　　　　　　　**氏名**　解答例

8-1. (X,d) を距離空間とし，$x,y,z,w \in X, \varepsilon > 0$ とする．$y \in B(x,\varepsilon), z \in B(y,\varepsilon), w \in B(z,\varepsilon)$ ならば，$w \in B(x,3\varepsilon)$ となることを示せ．

$$d(w,x) \leqq d(w,z) + d(z,x) \leqq d(w,z) + d(z,y) + d(y,x) < 3\varepsilon$$

$$\therefore w \in B(x,3\varepsilon)$$

8-2. 次の問いに答えよ．
(X,d) を距離空間とし，$A \subset X$ を部分集合とし，$x \in X$ を X の点とする．このとき，次の2条件が同値であることを証明せよ．
(a) $x \in \overline{A}$（つまり，x は A の触点）．
(b) A の点列 $x(1), x(2), x(3), \ldots$ が存在して，x に収束する．

(a) ⇒ (b)　$\forall m \in \mathbb{N}$ に対し $B(x, \frac{1}{m}) \cap A \neq \emptyset$

xはAの触点だから

$x(m) \in B(x, \frac{1}{m}) \cap A$ をとる．

$\{x(m)\}$ は A の点列で $0 \leqq d(x(m), x) < \frac{1}{m}$

よって $\lim_{m \to \infty} d(x(m), x) = 0$

$x(m)$ は x に収束

$\forall \varepsilon > 0$ $\frac{1}{m_0} \leqq \varepsilon$ となるように $m_0 \in \mathbb{N}$ をきめると $m_0 \leqq m \Rightarrow d(x(m), x) < \varepsilon$

(b) ⇒ (a)　$\forall \varepsilon > 0$ $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ $\forall m$

$m_0 \leqq m \Rightarrow d(x(m), x) < \varepsilon$

$x(m) \in B(x,\varepsilon) \cap A$ より $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$．$x$はAの触点

$x \in \overline{A}$

//

≪「数学の仕組み」に関するメモ≫

1. 三角不等式を繰り返し適用する．

2. x の $\frac{1}{m}$ 近傍 $B(x, \frac{1}{m}), m = 1,2,3,\ldots$ を考えるとよい．距離空間の場合，可算近傍系 $B(x, \frac{1}{m})$ があるので，距離空間の位相は，ある種の「可算性」を持ち，この問2のように，「点列」によって位相を調べることが可能となるのである．

コラム． コンピュータ上のネットワークを考えてみよう．仮想的に考えて，いろいろな点（サイト）がリンクしている．そのネットワークの2点の“距離”を，いくつのリンクで結べるか，その最小数で定義することができる：$d(x,y) :=$（x と y を結ぶために必要なリンクの最小数）．ただし，すべての点は，そのネットワークにつながっているとする．（また，実際は，リンクに方向性があると考える場合もあるが，今回は，すべて双方向と見なす．）この関数 d は，（値は整数だけを取るが）距離関数の条件を満たす．明らかに $d(x,y) \geq 0$ であり，$d(x,y) = 0$ なのは，$x = y$ の場合に限る．対称性も明らかである．三角不等式 $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ も，x から y 経由で z にたどることを考えれば明かであろう．