

基礎数学B 講義演習プリント・出席確認

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (2015年度後期)

No. 7 西暦2015年10月21日 (水2)

学生番号

氏名

解答例

7-1. 次の問いに答えよ.

$$(B(x,r)) = \{y \in \mathbb{R} \mid |x-y| < r\}$$

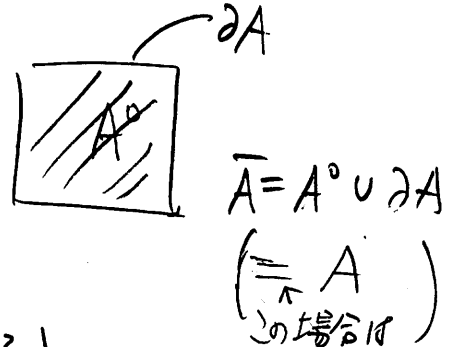
- (1) 开区間 (a,b) が \mathbb{R} の開集合であることを示せ.
 (2) 閉区間 $[a,b]$ が \mathbb{R} の閉集合であることを示せ.

(1) $x \in (a,b)$ とする. $a < x < b$ である. $\delta = \min\{x-a, b-x\}$ とおく.
 $B(x,\delta) \subset (a,b)$ である. (なぜなら, $y \in B(x,\delta)$ とすると, $|x-y| < \delta$
 だから $a < x-\delta < y < x+\delta < b$) したがって (a,b) は \mathbb{R} の開集合である.

(2) $[a,b]^c = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ である. $[a,b]^c$ が \mathbb{R} の開集合であることを示す.
 $x \in [a,b]^c$ とする. $x < a$ のとき $\delta = a-x$ とおくと $B(x,\delta) \cap [a,b] = \emptyset$ (なぜなら $y \in B(x,\delta)$ とすると $y < x+\delta < a$)
 $b < x$ のとき $\delta = x-b$ とおくと $B(x,\delta) \cap [a,b] = \emptyset$ ($y \in B(x,\delta)$ ならば $b < x-\delta < y$)
 したがって $B(x,\delta) \subset [a,b]^c$ である. したがって $[a,b]$ は \mathbb{R} の閉集合.

7-2. \mathbb{R} の閉区間の直積 $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ は Euclid 平面 \mathbb{R}^2 の部分集合である. 次の問いに答えよ.

- (1) A の \mathbb{R}^2 における内部は何か? (結論だけでよい).
 (2) A の \mathbb{R}^2 における閉包は何か? (結論だけでよい).
 (3) A の \mathbb{R}^2 における境界は何か? (結論だけでよい).



- (1) $A^o = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$
 (2) $\bar{A} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$
 (3) $\partial A = (\{a_1, b_1\} \times [a_2, b_2]) \cup ([a_1, b_1] \times \{a_2, b_2\})$

《「数学の仕組み」に関するメモ》

1, 2. Euclid 空間の距離や位相は, これから説明していく距離空間の理論, 位相空間の理論の基本になります. 内点, 触点, 境界点, 開集合, 閉集合などの基本的な用語の定義をしっかりと押さえておきましょう.
コラム. (距離空間と位相空間) 距離が定められている集合を距離空間という. 距離は遠い近いを決める. 距離が定められた瞬間に (ただの, 裸の) 集合が, 暗れて「空間」と呼ばれ, めでたく幾何や解析の対象となるのである. 調べてみると, 距離の構造は意外に精緻な構造であることに気づく. いわば, お互いに距離を保ったお堅いフォーマルな世界である. 距離空間には, 開集合や閉集合が考えられ, 「位相」という概念が抽出される. 位相によって, 空間や図形, 関数や写像のつながり具合が定まる. 位相構造が入った集合を位相空間という. 位相の構造は柔らかい構造である. いわば, お互いのつながりだけを大切にするカジュアルな世界である. これから学ぶ 有界, 一様連続, 完備, などは距離空間に固有な概念であり, 一方, 連結, 連続, コンパクトなどは位相的概念である.