# 基礎数学B講義演習プリント・出席確認

担当 石川 剛郎(いしかわ ごうお) (２０１５年度後期)

**No. 5　西暦２０１５年１０月１４日 (水２)**

**学生番号**　　　　　　　　　　**氏名**　解答例

**5-1.** 2 進法で表したとき 11.111 (2 進) となる数を 10 進法で表せ.

求める数は

$1\cdot 2^1+1\cdot 2^0+1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2^2}+1\cdot\frac{1}{2^3}$

$=2+1+0.5+0.25+0.125$ (10進)

$=3.875$

**5-2.** 全単射 $\psi:\mathbf{Z}\to\mathbf{N}$ を作れ.

$0,1,2,3,\cdots$ をそれぞれ $1,3,5,7,\cdots$ にうつす

$-1,-2,-3,\cdots$ をそれぞれ $2,4,6,\cdots$ にうつす

つまり $\psi(m)=\begin{cases}2m+1 & (m\geq 0)\\ -2m & (m<0)\end{cases}$ と定める

$\psi$は全単射である. 実際 $m,m'\in\mathbb{Z}$ について $\psi(m)=\psi(m')$ とする

$m\geq 0, m'\geq 0$ の場合 $2m+1=2m'+1$ より $m=m'$ となる

$m\geq 0, m'<0$ の場合 $\psi(m)$は奇数 $\psi(m')$は偶数で矛盾

$m<0, m'\geq 0$ の場合も矛盾

$m<0, m'<0$ の場合 $-2m=-2m'$ より $m=m'$ となる. よって$\psi$は単射

≪「数学の仕組み」に関するメモ≫

**1.** 2 進法で $A_pA_{p-1}\cdots A_1A_0.a_1a_2a_3\cdots$ (2 進) と表示される実数は,

$$A_p\cdot 2^p+A_{p-1}\cdot 2^{p-1}+\cdots+A_1\cdot 2^1+A_0\cdot 2^0+a_1\cdot 2^{-1}+a_2\cdot 2^{-2}+a_3\cdot 2^{-3}+\cdots$$

である. ただし, $A_i, a_j$ たちは, 0 か 1 である.

**2.** たとえば, $0,1,2,3,\ldots$ を $1,3,5,\ldots$ に写し, $-1,-2,-3,\ldots$ を $2,4,6,\ldots$ に写すとよい. それを定義式として書く.

**コラム. 数学的帰納法**では, 命題列 $P(n), n=1,2,3,\ldots$ を扱う. まず, $P(1)$ が成り立つことを確認する. 次に $k\geq 1$ について, $P(k)$ が成り立つと仮定して $P(k+1)$ を示す. つまり, $P(k)\Rightarrow P(k+1)$ を示す. このとき, 任意の $n=1,2,3,\ldots$ に対し, $P(n)$ が成り立つ, という論法である. 実際, $\mathbf{N}$ の部分集合

$$F:=\{n\in\mathbf{N}\mid P(n)\text{ が成り立たない}\}$$

を考える. $F$ が空集合でないとして, $F$ の中の**最小数**を $n_0$ とする. $P(1)$ は成り立つから $2\leq n_0$ である. $k=n_0-1$ とおくと, $k\in\mathbf{N}$ であるが, $k\notin F$ である. したがって $P(k)$ が成り立つ. すると, $P(k+1)=P(n_0)$ が成り立つことになり, $n_0\in F$ に矛盾する. したがって, $F$ は空集合であり, 任意の $n\in\mathbf{N}$ について, $P(n)$ が成り立つことがわかる.

(真 = 正しい = 成り立つ. 偽 = 正しくない = 成り立たない.)

また任意の $k\in\mathbb{N}$ について, $k$が偶数のとき $k=2l$ $(l\in\mathbb{N})$ とすると $\psi(-l)=k$. $k$が奇数のとき $k=2l+1$ $(l\in\mathbb{N}\cup\{0\})$ とすると $\psi(m)=k$, よって $\psi$は全射　以上により $\psi$は全単射 //