基礎数学B講義演習プリント・出席確認

担当 石川 剛郎(いしかわ ごうお)(2015年度後期)

No. 4　西暦2015年10月9日（金2）

学生番号　　　　　　　　　**氏名**　解答例

4-1. $X = \{0,1,2,\ldots,m\}, Y = \{0,1\}$，ただし $m \geq 1$ とする．このとき，X から Y への写像は全部でいくつあるか？また，X から Y への全射はいくつあるか？

各 $i \in X$ の行き先が 0 か 1 の2通り

よって 2^{m+1}

全射でないのは，この場合 定値写像 0 と 1 のみ

よって全射は $2^{m+2}-2$ 個

4-2. $X = \{1,2,3,4\}$ とする．X から X への全単射 $f : X \to X$ を $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 1, f(4) = 4$ で定める．逆写像 $f^{-1} : X \to X$ を求めよ．また．$f^2 = f \circ f : X \to X$ を求めよ．

$f(3)=1$ より $f^{-1}(1)=3$

$f(1)=2$ より $f^{-1}(2)=1$

$f(2)=3$ より $f^{-1}(3)=2$

$f(4)=4$ より $f^{-1}(4)=4$

$f^2(1)=f(f(1))=f(2)=3$

$f^2(2)=f(f(2))=f(3)=1$

$f^2(3)=f(f(3))=f(1)=2$

$f^2(4)=f(f(4))=f(4)=4$

≪「数学の仕組み」に関するメモ≫

1. $X = \{0,1,2,\ldots,m\}, Y = \{0,1,2,\ldots,n\}$ のとき，X から Y への写像の全体の個数は，$(n+1)^{m+1}$ 個ある．なぜか？ さらに，$n = 1$ の場合，全射でない写像はどのような写像か？

2. 写像 $f : X \to Y$ が**全単射**のとき，任意の y に対し，$f(x) = y$ となるような $x \in X$ が**ただ1つ存在**する．y に対し，このような x を対応させることで，逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ が定まる．したがって，逆写像 f^{-1} を求めるには，順に $f(x) = 1$ となる x を見つけて，$f^{-1}(1) = x$ と定め，$f(x) = 2$ となる x を見つけて，$f^{-1}(2) = x$ と定め,... とすればよい．$f^2(x) = f(f(x))$ は f で続けて2回つづけるだけなので簡単．(合成は全単射でなくても定義される.)

コラム． 写像 $f : X \to Y$ に対し，f の**グラフ**を $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$ と定義する．Γ_f は $X \times Y$ の部分集合である．いま，写像 $p_X : X \times Y \to X$ を $p_X((x,y)) = x$ （X 成分への射影）で定めるとき，制限写像 $p_X|_{\Gamma_f} : \Gamma_f \to X$ は全単射となる．その逆写像は，$i : X \to \Gamma_f, i(x) = (x, f(x))$ である．グラフは微分積分学でもなじみある概念であろう．一般に写像のグラフを図示するのは難しいが，抽象的に議論するときにもグラフは写像 f の分析に役立つ．