基礎数学B講義演習プリント・出席確認

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (西暦２０１５年度後期)

No. 3　西暦２０１５年１０月７日（水２）

学生番号　　　　　　　　　　**氏名**　解答例

3-1. $f : X \to Y$ を写像とする．$A \subset B \subset X$ ならば $f(A) \subset f(B)$ が成り立つことを示せ．

$y \in f(A)$ とする．$\exists a \in A$, $y = f(a)$ となる．$A \subset B$ だから $a \in B$
よって $y \in f(B)$ 　したがって $f(A) \subset f(B)$．

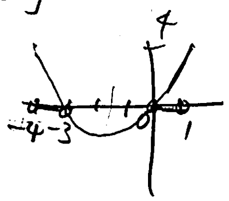
3-2. $f : X \to Y$ を写像とする．$A' \subset B' \subset Y$ ならば $f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$ が成り立つことを示せ．

$x \in f^{-1}(A')$ とする．$f(x) \in A'$ である．$A' \subset B'$ だから
$f(x) \in B'$ 　よって $x \in f^{-1}(B')$ 　したがって $f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$

3-3. $\mathbf{R}$ 上の関数 $f(x) = x^2 + 3x$ に対して，$f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{4\})$ および $f^{-1}((0,4))$ （開区間 $(0,4)$ の逆像）を求めよ．

$x^2+3x=0$ より $x=-3, 0$ 　よって $f^{-1}(\{0\}) = \{-3, 0\}$

$x^2+3x=4$ より $(x+4)(x-1)=0$ 　$x=-4, 1$
よって $f^{-1}(\{4\}) = \{-4, 1\}$



$0 < x^2+3x < 4$ より 　$0 < x(x+3)$ かつ $(x+4)(x-1) < 0$
$-4 < x < -3$ または $0 < x < 1$ 　$f^{-1}((0,4)) = (-4,-3) \cup (0,1)$

≪「数学の仕組み」に関するメモ≫

1. $f : X \to Y$ を写像とする．$A \subset X$ に対し，**像**を $\boxed{f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}}$ と定める．言い換えると，$f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$ である．

2. $f : X \to Y$ を写像とする．$A' \subset Y$ に対し，**逆像**を $\boxed{f^{-1}(A') := \{x \in X \mid f(x) \in A'\}}$ と定める．したがって，$f(f^{-1}(A')) = \{f(x) \mid x \in f^{-1}(A')\} = \{f(x) \mid x \in X, f(x) \in A'\} = \{y \in Y \mid \exists x \in X, y = f(x), f(x) \in A'\} = f(X) \cap A'$ が成り立つ．

3. 関数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ と $c \in \mathbf{R}$ について，逆像 $f^{-1}(\{c\})$ を求めることは，**方程式 $f(x) = c$ を解くこと**に他ならない．なお，$f^{-1}(\{c\})$ は，簡単に $f^{-1}(c)$ と略記することがある．

コラム： 写像 $f : X \to Y$ が**全射** (surjective) とは，任意の $c \in Y$ について，$f^{-1}(\{c\}) \neq \emptyset$ であること，と言い換えることができる．また，写像 $f : X \to Y$ が**単射** (injective) とは，任意の $c \in Y$ について，$f^{-1}(\{c\})$ がたかだか１つの要素から成ること，と言い換えることができる．写像 $f : X \to Y$ が**全単射** (bijective) とは，任意の $c \in Y$ について，$f^{-1}(\{c\})$ がただ１つの要素から成ること，と言い換えることができる．全単射の条件は，任意の $y \in Y$ について，ただ１つの $x \in X$ が存在して，$f(x) = y$ となること，と言い換えることができる．このとき，逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ が存在する．そして，$f^{-1}(\{c\}) = \{f^{-1}(c)\}, (c \in Y)$ が成り立つ．左辺の f^{-1} は逆像の記号であり，右辺の f^{-1} は逆写像の記号であることに注意せよ．