基礎数学B講義演習プリント・今回は提出不要

担当 石川 剛郎(いしかわ ごうお)(２０１５年度後期)

No. ２６　西暦２０１６年１月１３日（水２）

26-1.
Y を Hausdorff（ハウスドルフ）位相空間とする．このとき，対角線集合 $\Delta_Y = \{(y,y) \in Y \times Y \mid y \in Y\}$ は $Y \times Y$ の閉集合であることを示せ．ただし，直積集合 $Y \times Y$ には**直積位相**を入れるものとする．

$Y \times Y \setminus \Delta_Y$ が $Y \times Y$ の開集合であることを示す．
$(y_1, y_2) \in Y \times Y \setminus \Delta_Y$ とする．$y_1 \neq y_2$ である．Y は Hausdorff だから Y の開集合 V_1, V_2 があって $y_1 \in V_1$, $y_2 \in V_2$ $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ となる．$V_1 \times V_2$ は $Y \times Y$ の開集合で $(y_1, y_2) \in V_1 \times V_2$ かつ $\underbrace{(V_1 \times V_2) \subset Y \times Y \setminus \Delta_Y}$ である
（なぜなら，$(V_1 \times V_2) \cap \Delta_Y \neq \emptyset$ とすると，$\exists (y,y) \in \Delta_Y$, $(y,y) \in V_1 \times V_2$ つまり，$\exists y \in Y$，$y \in V_1$ かつ $y \in V_2$ となり $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ に矛盾するからである）従って $Y \times Y \setminus \Delta_Y$ は $Y \times Y$ の開集合である．よって Δ_Y は $Y \times Y$ の閉集合である．

26-2.
$(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間，Y を集合，$f : X \to Y$ を写像とする．$\mathcal{O}_Y := \{V \subset Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X\}$ とおくとき，$\mathcal{O}_Y$ が Y 上の開集合系の公理を満たすことを確かめよ．

- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{O}_X$ だから $\emptyset \in \mathcal{O}_Y$ である．
- $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{O}_X$ だから $Y \in \mathcal{O}_Y$ である．
- $V_1, V_2 \in \mathcal{O}_Y$ とする．$f^{-1}(V_1), f^{-1}(V_2) \in \mathcal{O}_X$ である．よって $f^{-1}(V_1 \cap V_2) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \in \mathcal{O}_X$ よって $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{O}_Y$ である．
- $V_\alpha \in \mathcal{O}_Y \ (\alpha \in \Gamma)$ とする．$f^{-1}(V_\alpha) \in \mathcal{O}_X$ である．よって $f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} V_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} f^{-1}(V_\alpha) \in \mathcal{O}_X$ である．よって $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} V_\alpha \in \mathcal{O}_Y$ である

よって以上より $\mathcal{O}_Y$ は Y 上の開集合系の公理をみたす．

≪「数学の仕組み」に関するメモ≫

1. 位相空間 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ がハウスドルフであるとは，任意の相異なる２点 $y_1, y_2 \in Y, y_1 \neq y_2$, に対して，$Y$ の開集合 V_1, V_2 があって，$y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset$ となることである．このとき，$V_1 \times V_2 \subset Y \times Y$ は直積位相に関して，$Y \times Y$ の開集合である．(ちなみに，$\mathcal{B} = \{V_1 \times V_2 \mid V_1, V_2 \in \mathcal{O}_Y\}$ は $Y \times Y$ の開集合の基である．)
閉集合とは，補集合が開集合であるような部分集合のことである．

2. (ア) $\emptyset, Y \in \mathcal{O}_Y$, (イ) $V_1, V_2 \in \mathcal{O}_Y$ ならば $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{O}_Y$, (ウ) $V_\alpha \in \mathcal{O}_Y, (\alpha \in \Gamma)$ ならば $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} V_\alpha \in \mathcal{O}_Y$, を示す．ちなみに，$\mathcal{O}_Y$ は，f を連続写像にするような Y 上の最強の位相である．これを，位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ から写像 f によって誘導される Y 上の位相，(**誘導位相**）とよぶ．

コラム. 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ 上にある同値関係 $\sim$ が与えられたとき，商集合 $Y = X/\!\sim$ 上に，自然な射影 $\pi : X \to X/\!\sim$ による誘導位相が入る．この位相 $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{X/\sim}$ を**商位相**とよぶ．