基礎数学B講義演習プリント・出席確認

担当 石川 剛郎(いしかわ ごうお) (2015年度後期)

No. 25　西暦2016年1月8日 (金2)

学生番号　　　　　　　　　　**氏名**

25-1. X, Y を位相空間とし，$f: X \to Y, g: Y \to Z$ を写像とする．次の問いに答えよ．
(1) $U \subset Z$ に対し，集合の等式 $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ を示せ．
(2) f, g が共に連続写像であれば，合成写像 $g \circ f: X \to Z$ も連続写像であることを示せ．

(1) $(g\circ f)^{-1}(U) \subset f^{-1}(g^{-1}(U))$: $x \in (g\circ f)^{-1}(U)$ とする $(g\circ f)(x) = g(f(x)) \in U$ である. $f(x) \in g^{-1}(U)$ よって $x \in f^{-1}(g^{-1}(U))$
$(g\circ f)^{-1}(U) \supset f^{-1}(g^{-1}(U))$: $x \in f^{-1}(g^{-1}(U))$ とする $f(x) \in g^{-1}(U)$ である $(g\circ f)(x) = g(f(x)) \in U$ である. よって $x \in (g\circ f)^{-1}(U)$ である.
以上により $(g\circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$

(2) $U \subset Z$ を Z の開集合とする. $(g\circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ である
g が連続だから $g^{-1}(U) \subset Y$ は Y の開集合である.
f が連続だから $f^{-1}(g^{-1}(U)) \subset X$ は X の開集合である
よって $g\circ f$ は連続写像である. $(g\circ f)^{-1}(U) =$

25-2. E ちゃんは「X がコンパクト位相空間，Y が Hausdorff 位相空間で，$f: X \to Y$ が連続な全単射であるとすると，f は同相写像である．このことを示せ」という問題をがんばって途中まで解いた．E ちゃんを助けて解答の続きを補ってみよ．

解答例. f は連続で全単射だから，逆写像 $f^{-1}: Y \to X$ が連続であることを示せばよい．そのために，X の任意の閉集合 A について，f^{-1} による ~~F~~ A の逆像，すなわち，$f(A)$ が Y の閉集合であることを示せばよい．
$A \subset X$ を X の閉集合とする．A はコンパクト空間 X の閉集合だから，コンパクト集合である．f は連続だから，$f(A) \subset Y$ はコンパクト集合である．Y はハウスドルフ空間だから，

$f(A)$ は Y の閉集合である. よって $(f^{-1})^{-1}(A)$ は Y の閉集合である
よって $f^{-1}: Y \to X$ は連続である
よって f は同相写像である.

≪「数学の仕組み」に関するメモ≫

1. $g: Y \to Z, U \subset Z$ のとき，$g^{-1}(U) = \{y \in Y \mid g(y) \in U\}$ が逆像の定義である．
等式 $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ を示すには，$(g \circ f)^{-1}(U) \subset f^{-1}(g^{-1}(U))$ と $(g \circ f)^{-1}(U) \supset f^{-1}(g^{-1}(U))$ を示せばよい．

2.　コンパクト空間 X の閉集合 A はコンパクトである．（証明（復習）．A の任意の開被覆を考える：$A \subset \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha, U_\alpha$ は X の開集合．このとき，$X = (\bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha) \cup (X \setminus A)$ という X の開被覆をとる．X がコンパクトだから，有限個の $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ を選んで，$X = U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_p} \cup (X \setminus A)$ とできる．よって，$A \subset U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_p}$ となるので A はコンパクト．）
コンパクト集合の連続写像による像はコンパクトである．（証明は講義で行う．）
ハウスドルフ空間 Y のコンパクト集合 B は閉集合である．（証明は以前の講義で述べた．テキスト p.137.）