基礎数学B講義演習プリント・出席確認

担当 石川 剛郎(いしかわ ごうお) (2015年度後期)

No. 24　西暦2016年1月6日（水2）

学生番号　一般の位相空間でOK　**氏名**

24-1. C 君は,「$(X,\mathcal{O})$ を ~~Hausdorff 空~~間, A を X のコンパクト部分集合とする. B が X の閉集合で, $B \subset A$ ならば B は X のコンパクト部分集合であることを示せ」という問題を途中まで解いた. C 君を助けて解答の続きを補ってみよ.

解答例.

$B \subset \bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha, U_\alpha \in \mathcal{O}$ を B の開被覆とする. $B \subset A$ だから, $A = B \cup (A \setminus B)$ で, B は X の閉集合だから $B^c \in \mathcal{O}$ となるので,

$$A = B \cup (A \setminus B) \subset \left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha\right) \cup B^c$$

は A の開被覆である.

A はコンパクトだから, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \Gamma$ があって,

$A \subset U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n} \cup B^c$

このとき $B \subset U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}$ （∵ $B \cap B^c = \emptyset$）

よって B はコンパクト部分集合

（B^c ははずせるかもしれないが念のため入れておく，というか一般論だから当然入れなければいけない）

24-2. D さんは,「X, Y を位相空間, $f: X \to Y$ を連続写像とする. A が X の連結部分集合ならば, $f(A)$ は Y の連結部分集合であることを示せ」という問題を途中まで解いた. D さんを助けて解答の続きを補ってみよ.

解答例.

$f(A)$ が連結でないと仮定して矛盾を導く. 仮定から, Y の開集合 U_1, U_2 で

$$f(A) \subset U_1 \cup U_2,\ f(A) \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset,\ f(A) \cap U_1 \neq \emptyset,\ f(A) \cap U_2 \neq \emptyset$$

を満たすものが存在する. $V_1 = f^{-1}(U_1), V_2 = f^{-1}(U_2)$ とおくと, f が連続だから, V_1, V_2 は X の開集合であり,

$A \subset V_1 \cup V_2$ …①

$A \cap V_1 \cap V_2 = \emptyset$ …②

$A \cap V_1 \neq \emptyset$, $A \cap V_2 \neq \emptyset$ …③

が成り立つ，これは A が連結であるという仮定に矛盾する. よって $f(A)$ は連結である （①の証明 $x \in A$ とする. $f(x) \in U_1 \cup U_2$. よって $x \in V_1$ または $x \in V_2$

②の証明 $\exists x \in A \cap V_1 \cap V_2$ とすると, $f(x) \in f(A) \cap U_1 \cap U_2$ となり矛盾

③の証明 $f(A) \cap U_1 \neq \emptyset$ より $\exists y \in f(A) \cap U_1$ 。$\exists x \in A$, $y = f(x)$ だが $x \in V_1$. よって $A \cap V_1 \neq \emptyset$

$A \cap V_2 \neq \emptyset$ も同様に示される）

≪「数学の仕組み」に関するメモ≫

1. $A \subset X$ が**コンパクト**部分集合 $\iff$ A の任意の開被覆から有限部分被覆を選ぶことができる.
2. $A \subset X$ が**連結でない** $\iff$ $\exists V_1, V_2$: X の開集合, $A \subset V_1 \cup V_2, A \cap V_1 \cap V_2 = \emptyset, A \cap V_1 \neq \emptyset, A \cap V_2 \neq \emptyset$.