基礎数学B講義演習プリント・出席確認

担当 石川 剛郎(いしかわ ごうお)(２０１５年度後期)

No. ２３ 西暦２０１５年１２月２５日（金２）

学生番号 **氏名**

23-1. (X,d) を距離空間とし，距離位相 $\mathcal{O}_d$ を入れる．このとき，$(X,\mathcal{O}_d)$ が Hausdorff（ハウスドルフ）空間であることを示せ．

$x, y \in X$, $x \neq y$ とする．$d(x,y) = r\ (>0)$ とおく．

$U = B(x, \frac{r}{2}) \in \mathcal{O}_d$, $V = B(y; \frac{r}{2}) \in \mathcal{O}_d$ である

$x \in U$, $y \in V$ である．また $U \cap V = \emptyset$ である．なぜなら，仮に

$z \in U \cap V$ とすると $d(z,x) < \frac{r}{2}$, $d(z,y) < \frac{r}{2}$ であり

$r = d(x,y) \leqq d(x,z) + d(z,y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$, したがって $r < r$ となり矛盾．

よって $U \cap V = \emptyset$ である

よって $(X, \mathcal{O}_d)$ は Hausdorff

23-2. $(X,\mathcal{O})$ を位相空間とする．次を示せ．

(1) 有限部分集合 $A \subset X$ はコンパクト．

(2) A, B が X のコンパクト集合ならば，$A \cup B$ もコンパクト．

(1) $A = \{x_1, \dots, x_p\}$ とする．

$A \subset \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha$, $U_\alpha \in \mathcal{O}$ とする．各 $x_i \in A$ に対し $(i=1,\dots,p)$ $\exists \alpha_i \in \Gamma$,

$x_i \in U_{\alpha_i}$ よって $A \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_p}$ よって A はコンパクト

(2) $A \cup B \subset \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha$, $U_\alpha \in \mathcal{O}$ とする

$A \subset \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha$ で A はコンパクトだから $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \Gamma$ $A \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_p}$

$B \subset \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha$ で B はコンパクトだから $\exists \alpha'_1, \dots, \alpha'_q \in \Gamma$ $B \subset U_{\alpha'_1} \cup \dots \cup U_{\alpha'_q}$

このとき $A \cup B \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_p} \cup U_{\alpha'_1} \cup \dots \cup U_{\alpha'_q}$, $(\alpha_i, \alpha'_j \in \Gamma)$

よって $A \cup B$ は コンパクトである．

23-3. 開区間 $(0,1) \subset \mathbf{R}$ の開被覆 (open covering) であって，その有限部分被覆では $(0,1)$ を覆わないような開被覆を具体的に挙げよ．

$U_m = (\frac{1}{m}, 1)$ $(m \in \mathbb{N})$ とおく U_m は $\mathbb{R}$ の開集合 $\{U_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ は $(0,1)$ の開被覆 だが 有限部分被覆では $(0,1)$ を覆うことはできない

(なぜなら，もし $\exists m_1, \dots, m_p \in \mathbb{N}$ $(0,1) \subset U_{m_1} \cup \dots \cup U_{m_p}$

とすると $M = \max\{m_1, \dots, m_p\}$ とおけば $(0,1) \subset (\frac{1}{M}, 1)$ となり矛盾が生まれる//

≪「数学の仕組み」に関するメモ≫

1. $x \in X, \varepsilon > 0$ に対し，x の ε 近傍 $B(x,\varepsilon) := \{y \in X \mid d(y,x) < \varepsilon\}$ は x を含む X の開集合です．(つまり，$x \in B(x,\varepsilon) \in \mathcal{O}_d$ が成り立ちます．)

2. $A \subset X$ がコンパクトとは「A の任意の開被覆から有限部分被覆が選べること」と覚えておくと良いです．

3. $\mathbf{R}^n$ の部分集合 A がコンパクト $\Longleftrightarrow$ A が有界閉集合，という定理から，閉集合ではない $(0,1)$ がコンパクトではない，ということはわかりますが，その事実を定義から具体的に納得するための問題です．