基礎数学B講義演習プリント・出席確認

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (２０１５年度後期)

No. ２２　西暦２０１５年１２月１８日（金２）

学生番号　　　　　　　　　　**氏名**

22-1. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．次の (I)(II) が成り立つ．

(I) $A_\alpha \subset X$ が連結集合 $(\alpha \in \Gamma)$ で，共通部分 $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha \neq \emptyset$ のとき，和集合 $\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha \subset X$ は連結集合である．(証明略)

(II) $A \subset X$ が連結集合ならば閉包 $\overline{A} \subset X$ も連結集合である．(証明略)

上の (I)(II) を用いて，次の問い (1)(2) に答えよ．

(1) X における２項関係 $\sim$ を，$x, y \in X$ に対し，

$$x \sim y \overset{\text{def.}}{\iff} X \text{ の連結な部分集合 } A \text{ が存在して，} \{x, y\} \subset A$$

により定義する．$\sim$ が X 上の同値関係であることを (I) を用いて示せ．

(2) $x \in X$ に対し，(1) で定めた同値関係 $\sim$ に関する同値類 C_x を x の属する**連結成分**とよぶ．$C_x \subset X$ が連結集合であることを (I) を用いて示せ．また，C_x が X の閉集合であることを (II) を用いて示せ．

(1) ・$x \in X$ とする．$\{x\} \subset X$ は連結集合で $x \in \{x\}$ だから $x \sim x$

・$x, y \in X$，$x \sim y$ とする．$\exists A \subset X$ 連結，$\{x, y\} \subset A$

（もちろん $\{y, x\} \subset A$ だから）よって $y \sim x$

・$x, y, z \in X$，$x \sim y$，$y \sim z$ とする．$\exists A \subset X$ 連結，$\{x, y\} \subset A$

$\exists B \subset X$ 連結，$\{y, z\} \subset B$．このとき $C = A \cup B$ とおく

$y \in A \cap B$ だから $A \cap B \neq \emptyset$．よって (I) より C は連結

$\{x, z\} \subset C$ だから $x \sim z$．

(2) $y \in C_x$ とする．$x \sim y$ だから $\exists A_y \subset X$ 連結，$\{x, y\} \subset A_y$

このとき A_y の任意の点は x と同値だから $A_y \subset C_x$

よって $\bigcup_{y \in C_x} A_y \subset C_x$，$y \in C_x$ に対し $y \in \bigcup_{y \in C_x} A_y$ だから

$\bigcup_{y \in C_x} A_y \supset C_x$ よって $C_x = \bigcup_{y \in C_x} A_y$ よって (I) より

C_x は連結．(II) より $\overline{C_x}$ は連結，$\forall y \in \overline{C_x}$ に対し $x \sim y$ だから

$\overline{C_x} \subset C_x$，$\overline{C_x} \supset C_x$ だから $\overline{C_x} = C_x$ よって C_x は X の閉集合

≪「数学の仕組み」に関するメモ≫

1. 位相空間 X の部分集合 $A \subset X$ が**連結集合**であるとは，「$A \subset U_1 \cup U_2$, U_1, U_2 が X の開集合で，$A \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ならば，$A \cap U_1 = \emptyset$ または $A \cap U_2 = \emptyset$」が成り立つことである．(定義)

(1) １点からなる集合 $\{x\} \subset X$ は連結集合である．(証明略．後で自分で証明を付けるとよい)

(2) 一般に，$A \subset X$ の内部 A° は X の開集合である．A° は A に含まれる最大の開集合である．**閉包** $\overline{A}$ は X の閉集合である．$\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合である．(証明略．後で自分で証明を付けるとよい．)