基礎数学B講義演習プリント・出席確認

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (２０１５年度後期)

No. ２１　西暦２０１５年１２月１６日（水２）

学生番号　　　　　　　　　　**氏名**

21-1. 次の問いに答えよ．

(1) $\mathbf{R}^2$ の点 (x_0, y_0) の Euclid 距離での ε-近傍

$$B((x_0, y_0), \varepsilon) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\}$$

に対し，$V = (x_0 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, x_0 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}) \times (y_0 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, y_0 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}})$ とおくと，$V \subset B((x_0, y_0), \varepsilon)$ が成り立つことを示せ．

(2) $\mathbf{R}^2$ 上の Euclid 距離位相 $\mathcal{O}$ に関して，ある $U \subset \mathbf{R}^2$ が開集合であるとはどういう意味か，定義を述べよ．

(3) $\mathbf{R}^2$ の Euclid 距離位相 $\mathcal{O}$ に関して，$\mathcal{B} := \{(a, b) \times (c, d) \in \mathcal{O} \mid a, b, c, d \in \mathbf{R}, a < b, c < d\}$ が $\mathbf{R}^2$ の開集合系 $\mathcal{O}$ の基（開基）であることを示せ．

(1) $(x,y) \in V$ とする　$|x-x_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$，$|y-y_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ だから

$d((x,y),(x_0,y_0))^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2$

$\therefore d((x,y),(x_0,y_0)) < \varepsilon$　　$(x,y) \in B((x_0,y_0),\varepsilon)$

よって　$V \subset B((x_0,y_0),\varepsilon)$

(2) 任意の $(x_0,y_0) \in U$ に対し，$\varepsilon > 0$ が存在して

$B((x_0,y_0),\varepsilon) \subset U$ が成り立つ こと

(3) $U \subset \mathbb{R}^2$ を開集合（つまり $U \in \mathcal{O}$）とする，$\forall (x_0,y_0) \in U$ に対し

$\exists \varepsilon > 0$，　$B((x_0,y_0),\varepsilon) \subset U$．

(1)より　$V = (x_0 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, x_0 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}) \times (y_0 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, y_0 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}})$

とおくと　$(x_0,y_0) \in V \subset U$ となり　$V \in \mathcal{B}$ である

したがって　$\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}$ の基である．

≪「数学の仕組み」に関するメモ≫

1. (1) $(x, y) \in V$ とする．$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ が成り立つ．距離の２乗 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ を不等式で評価しよう．

(2) 基本的な定義はすべて覚えておこう．

(3) $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ が $\mathcal{O}$ の基であるとは，任意の $U \in \mathcal{O}$, 任意の $x \in U$ に対して，$V \in \mathcal{B}$ で，$x \in V$ かつ $V \subset U$ となるものが存在することである．