基礎数学B講義演習プリント・出席確認

担当 石川 剛郎(いしかわ ごうお) (２０１５年度後期)

No. ２０　西暦２０１５年１２月１１日（金２）

学生番号　　　　　　　　　　　　**氏名**

20-1. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間，$x \in X$, $V, W \subset X$ とする．V が x の近傍で，W が x の近傍ならば，$V \cap W$ は x の近傍であることを示せ．

$x \in U \subset V$ となる $U \in \mathcal{O}$ が存在する

$x \in U' \subset W$ となる $U' \in \mathcal{O}$ が存在する.

このとき $U \cap U' \in \mathcal{O}$ であり

$x \in U \cap U' \subset V \cap W$

よって $V \cap W$ は xの近傍.

20-2. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間，$A \subset X$ とする．$\mathcal{O}_A := \{V \subset A \mid \exists U \in \mathcal{O}_X, V = A \cap U\}$ と定める．このとき，$\mathcal{O}_A$ が A の位相を定めること，つまり，$\mathcal{O}_A$ が A の開集合系の公理を満たすことを確かめよ．

(O-I) $\emptyset = A \cap \emptyset$, $\emptyset \in \mathcal{O}_X$ だから $\emptyset \in \mathcal{O}_A$

$A = A \cap X$, $X \in \mathcal{O}_X$ だから $A \in \mathcal{O}_A$

(O-II) $V_1, V_2 \in \mathcal{O}_A$ とする．$\exists U_1 \in \mathcal{O}_X$ $V_1 = A \cap U_1$.

$\exists U_2 \in \mathcal{O}_X$ $V_2 = A \cap U_2$

$V_1 \cap V_2 = A \cap (U_1 \cap U_2)$, $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}_X$ だから $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{O}_A$

(O-III) $V_\alpha \in \mathcal{O}_A$ $(\alpha \in \Gamma)$ とする $\exists U_\alpha \in \mathcal{O}_X$ $V_\alpha = A \cap U_\alpha$

$\bigcup_{\alpha \in \Gamma} V_\alpha = A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha\right)$ で，$\bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha \in \mathcal{O}_X$ だから $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} V_\alpha \in \mathcal{O}_A$ //

≪「数学の仕組み」に関するメモ≫

1. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ において，部分集合 $V \subset X$ が点 $x \in X$ の近傍 (neighborhood) であるとは，x が V の内点であるときにいう．つまり，$x \in U \subset V$ となる X の開集合 $U \in \mathcal{O}$ が存在するときである．

2. (I) $\emptyset, A \in \mathcal{O}_A$, (II) $V_1, V_2 \in \mathcal{O}_A$ ならば $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{O}_A$, (III) $V_\alpha \in \mathcal{O}_A$ $(\alpha \in \Gamma)$ ならば $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} V_\alpha \in \mathcal{O}_A$, の３条件を確かめる．

コラム． 位相空間では,「距離」は設定していないので，距離が遠いとか近いとか，ε-近傍とか，と言ったりする事はナンセンス（というか反則？）なのである．そこで，位相空間論では，距離を使う代わりに，開集合たち，つまり，開集合系を用いて,「近傍」の定義を与えるのだ．たとえば，任意の点 $x \in X$ について，全体集合 X は開集合なので，X は x の近傍という．なんだ，全体なんて，全然近くないじゃないか？近傍じゃないよ，という異論・違和感もあろう．実は，１つ１つの近傍を見るというより，x の近傍の全体，つまり **近傍系** を考えられる，という点がキーポイントなのだ．「位相」を用いて,「近づく」とか「連続」ということを議論できるのだ．