基礎数学B講義演習プリント・出席確認

担当 石川 剛郎(いしかわ ごうお) (２０１５年度後期)

No. １９　西暦２０１５年１２月９日（水２）

学生番号　　　　　　　　**氏名**

19-1. $X = (\{0\} \times \mathbf{N}) \cup (\{1\} \times \mathbf{N})$ に順序 $\preceq$ を次のように定める．$(i,n),(j,m) \in X$ （ただし，i,j は 0 または 1 であり，$n,m \in \mathbf{Z}$）について，

$$(i,n) \preceq (j,m) \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} i < j \text{ または } (i = j \text{ かつ } n \leq m)$$

このとき，順序集合 $(X, \preceq)$ は整列集合であることを示せ．

$A \subset X$, $A \neq \phi$ とする. $A \cap (\{0\} \times \mathbb{N}) \neq \phi$ のとき,
$n_0 := \min\{n \in \mathbb{N} \mid (0,n) \in A\}$ が存在する. $(0, n_0)$ は A の $\preceq$ に関する最小元. 実際 $(i,n) \in A$ に対し $i=0$ ならば $(0,n_0) \preceq (i,n)$,
$i=1$ でも $(0,n_0) \preceq (i,n)$
$A \cap (\{0\} \times \mathbb{N}) = \phi$ のとき, $A \underset{\neq\phi}{\subset} \{1\} \times \mathbb{N}$ であるから $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid$
$(1,n) \in A\}$ が存在し, $(1,n_0)$ は A の最小元. したがって $(X, \preceq)$ は整列集合

19-2. X を位相空間とし，$A, B \subset X$ とする．このとき，$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ が成り立つことを示せ．

$A \cup B \supset A$ より $\overline{A \cup B} \supset \overline{A}$, $A \cup B \supset B$ より $\overline{A \cup B} \supset \overline{B}$.
したがって $\overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cup \overline{B}$ である. $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ を示す.
$x \notin \overline{A} \cup \overline{B}$ とする. $x \notin \overline{A}$ かつ $x \notin \overline{B}$. よって $x \in V$ となる開集合 V
があって $V \cap A = \phi$, また $x \in W$ となる開集合 W があって $W \cap B = \phi$
このとき $x \in V \cap W$, $V \cap W$ は開集合で, $(V \cap W) \cap (A \cup B) = \phi$. よって $x \notin \overline{A \cup B}$

≪「数学の仕組み」に関するメモ≫

1. X の空でない部分集合 A をとり，それが最小元を持つことを示す．$A \cap (\{0\} \times \mathbf{N}) \neq \emptyset$ の場合と，$A \cap (\{0\} \times \mathbf{N}) = \emptyset$ の場合に，場合分けして，最小元の存在を示すとよい．

2. 位相空間 X の点 $x \in X$ が A の**触点**とは，$x \in V$ となる X の任意の開集合 V に対し，$V \cap A \neq \emptyset$ となるときにいう．(距離空間のときの触点の定義との変化に注意しよう.) A の触点の全体の集合を $\overline{A}$ と書き，A の X の中での**閉包**とよぶ．

コラム． 地図を考える．単純に縮小された地図上の距離は，実際の距離とは違う．でも尺度がわかっていれば，もとの距離は簡単に，というか，無意識のうちに復元できる．正方形は正方形，正三角形は正三角形のままだ．でも，縦と横の縮小率が違えば，２地点間の距離は，大きく変わってくる．正三角形が正三角形にならない．円は楕円になる．でも，開集合は開集合だ．縮小率が場所によって違っても，開集合は開集合になる．距離空間では，開集合系は距離から定まるが，**距離を変化させても，位相空間としては同じ，つまり開集合系は同じになる場合があるのだ．** メルカトール図法というものがある．(たとえば，日本が中心の世界地図だと) 北極のシロクマと南極のペンギンと大西洋のクジラには申し訳ないが，そこを切り開いて平面の地図を作る．当然のことながら，縮尺は場所によって違ってくる．地図の周辺の地域ほど伸ばされて描かれる．たとえばロシアやカナダはより大きく描かれてしまう．しかし，陸や海のつながり具合については，(切り裂いたところ，つまり北極海，南極大陸，大西洋，以外では) 変わらない．

したがって $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ よって $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ （次ページに別解あり）

19-2 別証明（本質的に前ページと同じだが）
$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ の部分

$x \in \overline{A \cup B}$ とする．

$\forall V \in \mathcal{O},\ x \in V \Rightarrow (A \cup B) \cap V \neq \phi$

したがって $A \cap V \neq \phi$ または $B \cap V \neq \phi$． (*)

このとき $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ つまり

$x \in \overline{A}$ または $x \in \overline{B}$

$\Big(\Leftrightarrow (\forall V \in \mathcal{O},\ x \in V \Rightarrow A \cap V \neq \phi)$ または

$(\forall W \in \mathcal{O}\ \ x \in W \Rightarrow A \cap W \neq \phi)\Big)$ (**)

(**) は (*) とちがうことに注意

を示す．そのために

$x \notin \overline{A}$ と仮定する．

$\exists V \in \mathcal{O},\ x \in V$ かつ $A \cap V = \phi$ である．

さらに

$x \in \overline{B}$ と仮定する

$\exists W \in \mathcal{O},\ x \in W$ かつ $B \cap W = \phi$ である

この V, W について $V \cap W \in \mathcal{O}$ であり

$x \in V \cap W$ かつ $(A \cup B) \cap (V \cap W)$

$= (A \cap V \cap W) \cup (B \cap V \cap W) = \phi$

これは (*) に反する

よって $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ よって $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$．