基礎数学B講義演習プリント・出席確認

担当 石川 剛郎(いしかわ ごうお)(２０１５年度後期)

No. １７　西暦２０１５年１２月２日（水２）

学生番号　　　　　　　　　　**氏名**

17-1. 集合 $\{0,1\}^{\mathrm{N}} = \{a = (a_1, a_2, a_3, \dots) \mid a_m = 0$ または $1\,(m \in \mathrm{N})\}$ に関して，次の問いに答えよ．

(1) f を N から $\{0,1\}^{\mathrm{N}}$ への任意の写像とする．$k \in \mathrm{N}$ に対し，$f(k) = a_k = (a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, \dots)$ としたとき，$b = (b_1, b_2, b_3, \dots) \in \{0,1\}^{\mathrm{N}}$ を

$$b_k := \begin{cases} 1 & (a_{kk} = 0 \text{ のとき}), \\ 0 & (a_{kk} = 1 \text{ のとき}), \end{cases}$$

により定める．このとき，$b \notin f(\mathrm{N})$ を示せ．

(2) $\mathrm{Card}(\mathrm{N}) \neq \mathrm{Card}(\{0,1\}^{\mathrm{N}})$ を示せ．

(1) $\forall k \in \mathbb{N}$ について，$b_k \neq a_{kk}$ だから $b \neq a_k = f(k)$
よって $b \notin f(\mathbb{N})$

(2) (1)より $\mathbb{N}$ から $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ への~~全射は存在しない~~
全単射は存在しない　よって $\mathrm{Card}(\mathbb{N}) \neq \mathrm{Card}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$

17-2. 集合 A のべき集合 $\mathcal{P}(A)$ 上に２項関係 $\preceq$ を，$B, C \in \mathcal{P}(A)$, つまり，$B, C \subset A$ について，

$$B \preceq C \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} B \subset C$$

により定める．$\preceq$ が $\mathcal{P}(A)$ 上の順序関係であることを示せ．

$\forall B \in \mathcal{P}(A)$, $B \subset B$ だから $B \preceq B$

$B, C \in \mathcal{P}(A)$ について $B \preceq C$ かつ $C \preceq B$ とする．$B \subset C$ かつ $C \subset B$ である．よって $B = C$

$B, C, D \in \mathcal{P}(A)$ について $B \preceq C$ かつ $C \preceq D$ とする．$B \subset C$ かつ $C \subset D$ である．よって $B \subset D$　よって $B \preceq D$.

≪「数学の仕組み」に関するメモ≫

1. (1) から f が全射でないことがわかる．なお，$\{0,1\}^{\mathrm{N}}$ から $\mathcal{P}(\mathrm{N})$ への全単射が存在する．実際，$a = (a_1, a_2, a_3, \dots) \in \{0,1\}^{\mathrm{N}}$ に対し，$\{k \in \mathrm{N} \mid a_k = 1\} \subset \mathrm{N}$ を対応させればよい．したがって，(2) から $\mathrm{Card}(\mathrm{N}) \neq \mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathrm{N}))$ がわかる．

2. (1) $B \preceq B$, (2) ($B \preceq C$ かつ $C \preceq B$) $\Rightarrow B = C$, (3) ($B \preceq C$ かつ $C \preceq D$) $\Rightarrow B \preceq D$ を示す．