基礎数学B講義演習プリント・出席確認

担当 石川 剛郎(いしかわ ごうお) (２０１５年度後期)

No. １６　西暦２０１５年１１月２７日（金２）

学生番号　　　　　　　　　　**氏名**

16-1. X, Y を集合，$f : X \to Y$ を写像とする．このとき，X 上の２項関係を

$$x \sim x' \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} f(x) = f(x')$$

で定める．次を示せ．

(1) $\sim$ が同値関係であることを示せ．

(2) f から誘導される写像 $\overline{f} : X/\!\sim\, \to Y$ が単射であることを示せ．

(1) ・$f(x)=f(x)$ より $x \sim x$

・$x \sim x'$ とする $f(x)=f(x')$ よって $f(x')=f(x)$ よって $x' \sim x$

・$x \sim x'$, $x' \sim x''$ とする $f(x)=f(x')$, $f(x')=f(x'')$ よって $f(x)=f(x'')$

よって $x \sim x''$

(2) $\overline{f}([x]) := f(x)$ である

$[x], [x'] \in X/\sim$ について $\overline{f}([x]) = \overline{f}([x'])$ とする．このとき $f(x)=f(x')$

よって $x \sim x'$ よって $[x]=[x']$ よって $\overline{f}$ は単射

16-2. A を $\mathbf{N}$ の部分集合とする．A が有限集合でなければ，A は可算無限集合である．このことを，$\mathbf{N}$ から A への全単射が存在することを示すことにより証明せよ．

A が有限集合でないとする．$A \neq \emptyset$ である．

$a_1 = \min A$ とおく．仮定から $A \neq \{a_1\}$．$A_1 = A \setminus \{a_1\}$ とおく

$A_1 \neq \emptyset$ である．$a_2 = \min A_1$ とおく．$A \neq \{a_1, a_2\}$

$A_2 = A \setminus \{a_1, a_2\}$ とおく．$A_2 \neq \emptyset$ である．$a_3 = \min A_2$ とおく．

以下同様にして 数列 a_n を得る．$f : \mathbb{N} \to A$ を $f(n) = a_n$ で定める．a_n の作り方から f は単射である．f が全射でないと仮定する

$B = A \setminus f(\mathbb{N}) \neq \emptyset$，$b = \min B$ とおくと，a_n の作り方から $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n < b$ よって $f(\mathbb{N}) \subset \{1, 2, \cdots, b\}$ となり $f(\mathbb{N})$ は有限となり f の単射性に矛盾する．よって f は全射 よって f は全単射 よって A は可算無限

≪「数学の仕組み」に関するメモ≫

1. $\overline{f} : X/\!\sim\, \to Y$ は，任意の $[x] \in X/\!\sim$ に対し，$\overline{f}([x]) = f(x)$ により（代表元のとりかたに依らずに）定まる．

2. A が有限集合でないとする．A に属する最小数を a_1 とおく．$A_1 = A \setminus \{a_1\}$ とおく．$A_1 \neq \emptyset$ である．A_1 に属する最小数を a_2 とおく．この操作を続けていけば，$\mathbf{N}$ から A への写像 $f : \mathbf{N} \to A, f(n) = a_n$ が作られる．この写像が全単射であることを示せばよい．f が単射なのは作り方から明らかだろう．f が全射でないとすると，$f(\mathbf{N}) \neq A$ だから，$A \setminus f(\mathbf{N}) \neq \emptyset$ なので，その最小数を考えると $f(\mathbf{N})$ が有限集合ということになり矛盾が生じる．

コラム 一般に集合 X に対して，そのべき集合 $\mathcal{P}(X)$ の濃度は，元の濃度とは異なる．(Cantor の定理．真に "大きな" 濃度になる．) すると，$\mathcal{P}(X)$ のべき集合 $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ の濃度は $\mathcal{P}(X)$ の濃度より大きくなる．この考察を続けていけば，どんどん濃度が大きくなる集合の列：

$$X,\ \mathcal{P}(X),\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)),\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))),\ \cdots,$$

を作ることができるわけである．$X = \emptyset$ から始めると，すべての自然数を得る．$X = \mathbf{N}$ から始めると，濃度の列 $\aleph_0,\ \aleph,\ 2^{\aleph},\ \cdots$ を得る．