基礎数学B講義演習プリント・出席確認

担当 石川 剛郎(いしかわ ごうお)(２０１５年度後期)

No. １５　西暦２０１５年１１月２５日（水２）

学生番号　　　　　　　　　　**氏名**

15-1. X を複素 n 次正方行列全体の集合とし，X 上の２項関係 $\sim$ を，$A, B \in X$ に対し，

$$A \sim B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \text{複素 } n \text{ 次正則行列 } P \text{ が存在して，} A = PBP^{-1}$$

と定める．$\sim$ が同値関係であることを示せ．

Iを単位行列とすると Iは正則行列で $A = IAI^{-1}$ だから
$A \sim A$ が成り立つ

$A, B \in X$, $A \sim B$とする. $\exists P$ 正則, $A = PBP^{-1}$ となる. このとき
$B = P^{-1}AP = P^{-1}A(P^{-1})^{-1}$ で P^{-1}も正則だから $B \sim A$.

$A, B, C \in X$, $A \sim B$, $B \sim C$とする. $\exists P, Q$ 正則,
$A = PBP^{-1}$, $B = QCQ^{-1}$ である. このとき PQも正則で
$(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$だから $A = P(QCQ^{-1})P^{-1} = (PQ)C(PQ)^{-1}$. よって $A \sim C$

15-2. 一般の集合 X とその上の同値関係 $\sim$ を考える．$x \in X$ に対し，記号 $[x]$ で x が属する同値類を表す．このとき，任意の $x, y \in X$ について，

$$x \sim y \iff [x] = [y]$$

が成り立つことを示せ．

$\Rightarrow$を示す. $x \sim y$とする.
$[x] \subset [y]$を示す. $w \in [x]$とする. $w \sim x$である また $x \sim y$
だから $w \sim y$ である. よって $w \in [y]$
$[x] \supset [y]$を示す. $w \in [y]$とする. $w \sim y$である. また $x \sim y$
より $y \sim x$ である. よって $w \sim x$である. よって $w \in [x]$
以上より $[x] = [y]$

$\Leftarrow$ $[x] = [y]$ とする $x \in [x] = [y]$ より $x \sim y$ が成り立つ //

≪「数学の仕組み」に関するメモ≫

1. 同値関係の条件は，

(1) $\forall x \in X, x \sim x$ （反射律），

(2) $\forall x, y \in X, (x \sim y \Rightarrow y \sim x)$ （対称律），

(3) $\forall x, y, z \in X, ((x \sim y \text{ かつ } y \sim z) \Rightarrow x \sim z)$ （推移律）．

ところで，問題１の同値関係に関する同値類の代表元がいわゆる Jordan 標準形である．

2. $x \in X$ に対し，x が属する（$\sim$ に関する）**同値類**は，$[x] := \{y \in X \mid y \sim x\}$ である．X の部分集合である．

コラム． 集合 X に同値関係が与えられると X の要素を組分けできる．逆に，X の要素を組分けすれば，X 上の同値関係が定まる．集合 X 上の同値関係 $\sim$ について，同値類（組）の全体の集合を $X/\sim$ と表し，X の $\sim$ による**商集合**とよぶ．

ところで，皆さんの誕生日はいつですか？ 通常，誕生日というと，何月何日，と答える．誕生した日（戸籍に記載されている正式な誕生年月日）はもちろん１日だけなのに，その，何年の何月何日，までは通常考えない．これは，誕生年にはこだわらずに，月日が同じ，という同値関係を考えて，その同値類を誕生日としているわけである．そうでないと，誕生日は１回だけ，ということになり，誕生日を毎年お祝いできなくなってさびしいだろう．