基礎数学B講義演習プリント・今回は提出不要

担当 石川 剛郎(いしかわ ごうお)(２０１５年度後期)

No.１３ 西暦２０１５年１１月１８日（水２）

13-1.
(X, d) を距離空間とし，$x(m)$ を X 上の点列，$z, z' \in X$ とする．$x(m)$ が z に収束し，z' にも収束するならば，$z = z'$ であることを示せ．

$\forall \varepsilon > 0$ に対し $\exists m_0 \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $m_0 \leq m \Rightarrow d(x(m), z) < \varepsilon$

また $\exists m_1 \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $m_1 \leq m \Rightarrow d(x(m), z') < \varepsilon$

よって $0 \leqq d(z, z') \leqq d(z, x(m)) + d(x(m), z') < 2\varepsilon$

$\max\{m_0, m_1\} \leqq m$ とすると

εは任意の正数だから $d(z, z') = 0$，よって $z = z'$

//

13-2.
(X, d) を距離空間とし，$x(m)$ を X 上の点列，$z \in X$ とする．$x(m)$ が z に収束するならば，その任意の部分列も同じ点 z に収束することを示せ．

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists m_0 \leqq \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $m_0 \leq m \Rightarrow d(x(m), z) < \varepsilon$

いま$\{x(m(p))\}$を$\{x(m)\}$の部分列とするとき $m_0 \leq m(p_0)$ となるように $p_0 \in \mathbb{N}$ をとると，$\forall p \in \mathbb{N}$ $p_0 \leq p$ ならば $m_0 \leq m(p_0) \leq m(p)$ だから $d(x(m(p)), z) < \varepsilon$ よって $x(m(p)) \to z$ $(p \to \infty)$

≪「数学の仕組み」に関するメモ≫

1. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $m_0 \in \mathbf{N}$ が存在して，$m_0 \leq m$ ならば $d(x(m), z) < \varepsilon$ が成り立つ．また，$m_1 \in \mathbf{N}$ が存在して，$m_1 \leq m$ ならば $d(x(m), z') < \varepsilon$ が成り立つ．$\max\{m_0, m_1\} \leq m$ に対して，これらを用いると，距離の正値性と三角不等式から $0 \leq d(z, z') < 2\varepsilon$ となり，ε の任意性から，$d(z, z') = 0$ となり，再び正値性から，$z = z'$ となる．

2. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$m_0 \in \mathbf{N}$ が存在して，$m_0 \leq m$ ならば $d(x(m), z) < \varepsilon$ が成り立つ．$x(m(p))$ を部分列とすると，$m(p_0) \geq m_0$ となるような p_0 をとればよい．

コラム１. （部分列の収束に関する注意.）
(X, d) を距離空間とし，$x(m)$ を X 上の点列，$z \in X$ とする．このとき，次の条件は同値である．
(1) 点列 $x(m)$ のある部分列が点 z に収束する．
(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\{m \in \mathbf{N} \mid x(m) \in B(z, \varepsilon)\}$ が無限集合である．

実際，(1) $\Rightarrow$ (2) は，$x(m(p))$ が z に収束すれば，$\{m(p) \in \mathbf{N} \mid x(m(p)) \in B(z, \varepsilon)\}$ は無限集合，ということからわかる．(2) $\Rightarrow$ (1) は，任意の $p \in \mathbf{N}$ について，$\{m \in \mathbf{N} \mid x(m) \in B(z, \frac{1}{p})\}$ が無限集合だから，$x(m(p)) \in B(z, \frac{1}{p})$ となるように $m(p) \in \mathbf{N}$ を取る事ができるし，$\mathbf{N}$ の無限部分集合の性質を考慮してさらに，追加条件として，$m(p)$ が p に関して狭義単調増加になるように取ることもできるからである．

コラム２. （点列コンパクト性と“コンパクト性”の関係．演習プリント１２も参照のこと）
距離空間 (X, d) の部分集合 A について，A が**点列コンパクト**であることと，次の**コンパクト条件**は同値である．（しばらくしたら，講義で再度説明する予定です.）

コンパクト条件：
「$A \subset \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U(\alpha), U(\alpha) \subset X$ は X の開集合，ならば，$\exists \alpha(1), \ldots, \alpha(p) \in \Gamma$, $A \subset \bigcup_{i=1}^{p} U(\alpha(i))$」