基礎数学B講義演習プリント・出席確認

担当 石川 剛郎(いしかわ ごうお) (２０１５年度後期)

No. １２ 西暦２０１５年１１月６日 (金２)

学生番号 **氏名**

12-1.
$\mathbf{R}$ の開区間 $A = (0,1)$ が全有界であることを示せ．ただし，$\mathbf{R}$ には Euclid 距離を入れる．

$\forall \varepsilon > 0$ に対し $m \in \mathbb{N}$ を $\frac{1}{m} < \varepsilon$ となるようにとる

$a_i = \frac{i}{m}$ $(1 \leq i \leq m-1)$ とおく，このとき

$A \subset \bigcup_{i=1}^{m-1} B(a_i, \varepsilon)$ である．

なぜなら $x \in A$ に対し $\exists j$ $(0 \leq j \leq m-1)$，$\frac{j}{m} < x \leq \frac{j+1}{m}$ となるから

$\exists i$ $(1 \leq i \leq m-1)$ があって $|x - a_i| < \frac{1}{m} < \varepsilon$ ($j=0$ のときは $i=j+1$ をえらぶ) //

12-2.
(X,d) を距離空間とし，$A, B \subset X$ を点列コンパクト集合とする．このとき次を示せ．
(1) $A \cup B$ は点列コンパクトである．
(2) $A \cap B$ は点列コンパクトである．

(1) $x(m)$ を $A \cup B$ 上の点列とする，このとき $\{m \in \mathbb{N} \mid x(m) \in A\}$ または $\{m \in \mathbb{N} \mid x(m) \in B\}$ は無限集合となる．したがって $x(m)$ の部分列で A 上の点列 または B 上の点列が取れる いずれにせよ，さらにその部分列で $A \cup B$ の点に収束するものがとれる．

(2) $x(m)$ を $A \cap B$ 上の点列とする．$x(m)$ は A 上の点列だから その部分列で A の点 z に収束するものがとれる．その部分列は B 上の点列 だから，さらにその部分列で B 上の点 z' に収束 するものがとれる．このとき $z = z'$ だから $z \in A \cap B$ //

≪「数学の仕組み」に関するメモ≫

1. (X,d) を距離空間とし，$A \subset X$ とするとき，A が**全有界**であるとは，「任意の $\varepsilon > 0$ に対し，A に属する有限個の点 $a_1, \ldots, a_p$ が存在して，$A \subset B(a_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(a_p, \varepsilon)$ となること」である．
任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$m \in \mathbf{N}$ を $\frac{1}{m} < \varepsilon$ となるようにとり，区間 $(0,1)$ の m 等分点を考えるとよい．

2. A が**点列コンパクト**であるとは，「A の任意の点列について，A の点に収束するような部分列を選ぶことができること」である．
$A \cup B$ の点列が与えられたとき，その部分列で，A の点列になるか，B の点列になるようなものが取れる．いずれにせよ，さらにその部分列を考えれば，A の点か，または，B の点に収束する．
$A \cap B$ の点列が与えられたとき，それは，A の点列であるから，A の点に収束するような部分列が取れる．それはまた B の点列でもあるから，さらに部分列をとれば，B の点に収束する．収束する点は一意的に定まるから（収束する点列の部分列は同じ点に収束するから），$A \cap B$ の点に収束する．

コラム． 次のことは，(微分積分でも) 当たり前のように使っている．
● 点列 $x(m)$ が点 z に収束し，点 z' にも収束するならば，$z = z'$ である．
● 点列 $x(m)$ が点 z に収束するならば，その任意の部分列も同じ点 z に収束する．
●「点列 $x(m)$ のある部分列が点 z に収束する」$\Longleftrightarrow$「任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\{m \in \mathbf{N} \mid x(m) \in B(z, \varepsilon)\}$ が無限集合」
これらは，収束の定義，部分列の定義（と距離の性質）から，一般の距離空間でも証明することができる．