基礎数学Ｂ講義演習プリント・出席確認

担当 石川 剛郎(いしかわ ごうお)（２０１５年度後期）

No. １１　西暦２０１５年１１月４日（水２）

学生番号　　　　　　　　　　　　　**氏名**

11-1.

次の問いに答えよ．ただし，$\mathbf{R}$ には通常の距離（Euclid 距離）を入れる．

(1) $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ は $\mathbf{R}$ の開集合であることを示せ．

(2) (X, d) を距離空間，$f : X \to \mathbf{R}$ を連続関数とする．このとき，$U := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ は X の開集合であることを示せ．

(1) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とする. $x<0$ または $0<x$ である. $\delta = |x| > 0$ とおく
$B(x, \delta) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ である. 実際 $y \in B(x, \delta)$ とすると
$x - |x| < y < x + |x|$ である. $x<0$ のとき $y<0$,
$0<x$ のとき $0<y$ だから $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. よって $B(x, \delta) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$
したがって $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ は $\mathbb{R}$ の開集合である

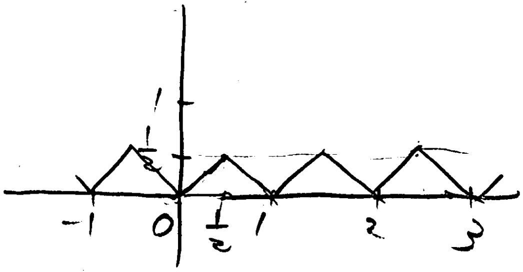
(2) $U = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ である. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ は $\mathbb{R}$ の開集合で,
f は連続だから U は X の開集合である

//

11-2.

(X, d) を距離空間とし，空でない部分集合 $A \subset X$, $x \in X$ に対し，$\mathrm{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}$ とおく．いま，$X = \mathbf{R}$ とし，d を Euclid 距離とする．整数全体からなる部分集合 $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$ に対し，関数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を，$x \in \mathbf{R}$ について，$f(x) := \mathrm{dist}(x, \mathbf{Z})$ により定める．f のグラフを図示せよ．

グラフは次の通り



$m \in \mathbb{Z}$ に対し 区間 $[m, m+1)$ を考える.

$$f(x) = \min\{x - m,\ m+1-x\}$$
$$= \begin{cases} x - m & (m \leqq x \leqq m + \frac{1}{2}) \\ m+1-x & (m + \frac{1}{2} \leqq x < m+1) \end{cases}$$

(等号を入れても入れなくても同じ)

となる

//

≪「数学の仕組み」に関するメモ≫

1. 連続写像 $f : X \to Y$ による Y の開集合の逆像は X の開集合である．

2. $x \in \mathbf{R}$ について，$f(x) = \inf\{|x - y| \mid y \in \mathbf{Z}\}$, すなわち，$x$ と $\mathbf{Z}$ のすべての点との距離を見て，そのうち x に一番近い $\mathbf{Z}$ の点からの距離が $f(x)$ である．(もし x に一番近い点がないなら，そのような距離の下限である)．

コラム. 連続写像とは，「定義域の各点 x の行き先 y の任意に小さな近傍 V に対し，x の十分小さな近傍 U をとれば，U の中のすべての点の行き先が V に含まれるような写像」のことである．つまり，「近づくものは近づくものに写るような写像」のことである．この連続の概念を，ε-δ 論法を用いて明確に述べてほしい．