基礎数学B講義演習プリント・出席確認

担当 石川 剛郎(いしかわ ごうお) (2015年度後期)

No. 10 西暦2015年10月30日 (金2)

学生番号 **氏名**

10-1.
(X,d) を距離空間，$x \in X$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $\eta > 0$ に対して，$\overline{B(x,\varepsilon)} \subset B(x,\varepsilon+\eta)$ (x の ε 近傍の閉包が $\varepsilon+\eta$ 近傍に含まれること）を示せ．

$y \in \overline{B(x,\varepsilon)}$ とする．$B(y,\eta) \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset$ である

$\exists z \in B(y,\eta) \cap B(x,\varepsilon)$．このとき $d(z,y) < \eta$, $d(z,x) < \varepsilon$

よって $d(y,x) \leqq d(y,z) + d(z,x) < \eta + \varepsilon$

よって $y \in B(x, \varepsilon+\eta)$

//

10-2.
(X,d) を距離空間，$x \in X$ とする．X の点列 $x(m), m \in \mathbf{N}$, が x に収束するとは，$\lim_{m\to\infty} d(x(m),x) = 0$ が成り立つことである．この定義を,「任意 ($\forall$)」「ある，存在する ($\exists$)」などの用語を用いて，より詳しい同値条件に書き換えよ．

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists m_0 \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N}$

$m_0 \leqq m$ ならば $d(x(m), x) < \varepsilon$

10-3.
$X = \{0,1\}$ とし，X 上の距離関数 $d: X \times X \to \mathbf{R}$ を $d(0,1) = d(1,0) = 1, d(0,0) = d(1,1) = 0$ により定める．このとき，$\overline{B(0,1)}$（0 を中心とした 1 近傍の X における閉包）と $\{x \in X \mid d(x,0) \leq 1\}$ が等しくないことを確かめよ．

$B(0,1) = \{x \in X \mid d(x,0) < 1\} = \{0\}$

$B(1,1) = \{x \in X \mid d(x,1) < 1\} = \{1\}$ なので $B(1,1) \cap B(0,1) = \emptyset$

$1 \notin \overline{B(0,1)}$ したがって $\overline{B(0,1)} = \{0\}$，一方 $\{x \in X \mid d(x,0) \leq 1\} = X \neq \{0\}$

//

≪「数学の仕組み」に関するメモ≫

1. ε 近傍の定義 $B(x,\varepsilon) := \{y \in X \mid d(y,x) < \varepsilon\}$ と閉包の定義を確認すれば分かる．

2. 非負実数列 $d(m)$ について，次の２条件は同値である．

(1) $\lim_{m\to\infty} d(m) = 0$.

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ について，ある $m_0 \in \mathbf{N}$ が存在して，任意の $m \in \mathbf{N}$ について，$m_0 \leq m$ ならば $d(m) < \varepsilon$.

ちなみに，極限の定義をそのままあてはめると，(2) の条件の最後は，$|d(m)| < \varepsilon$ となるはずであるが，今の場合，$d(m) \geq 0$ なので，$|d(m)| = d(m)$ である．

3. 問題２の距離は，$\mathbf{R}$ 上の Euclid 距離（標準距離）を $X = \{0,1\}$ に制限したものである．Euclid 空間で成り立つことも，一般の距離空間では成立しないこともある，そんな一例である．

コラム. $(X,d_X),(Y,d_Y)$ を距離空間とする．写像 $f:(X,d_X) \to (Y,d_Y)$ が**等長埋め込み**であるとは，任意の x,x' に対し，$d(f(x),f(x')) = d(x,x')$ であるときにいう．X が２点からなる集合の場合，Euclid 空間 $\mathbf{R}$ への等長埋め込みが存在する．X が３点からなる集合の場合，Euclid 空間 $\mathbf{R}^2$ への等長埋め込みが存在する．一般には，どの次元の Euclid 空間にも等長に埋め込めないような有限距離空間が存在する．一方，任意の "Riemann 多様体" は，ある次元の Euclid 空間への等長埋め込みを持つことが知られている（Nash の埋め込み定理）．