補充問題 その３ 基礎数学B

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (西暦２０１５年度後期)

以下の問題では，$\mathbf{R}^n$, $n = 1, 2, 3, \dots,$ には，特に断らない限り，通常の位相（Euclid 距離から定まる Euclid 位相）を入れる．

補充問題２９． X を実数列全体のなす集合とする．X の上の 2 項関係 R を，X の要素 $a = (a_k)_{k=1}^{\infty}, b = (b_k)_{k=1}^{\infty}$ に対して，

$$aRb \overset{\text{def.}}{\iff} \text{たかだか有限個の } k \text{ を除くと } a_k = b_k \text{ が成り立つ}$$

により定義する．R が X の上の同値関係になることを示せ．

補充問題３０． $X = \mathcal{P}(\mathbf{N}) \setminus \{\emptyset\} = \{A \mid A \subset \mathbf{N}, A \neq \emptyset\}$ とおく．X の上の 2 項関係 $\sim$ を，$A, B \in X$ に対し，

$$A \sim B \overset{\text{def.}}{\iff} A \text{ と } B \text{ の最小の元が一致する}$$

により定義する．このとき $\sim$ が同値関係であることを示し，商集合がどのような集合であるか考察せよ．

補充問題３１． $C^0(\mathbf{R})$ を $\mathbf{R}$ 上の実数値連続関数の全体のなす集合とする．$C^0(\mathbf{R})$ 上の 2 項関係 $\sim$ を

$$f \sim g \overset{\text{def.}}{\iff} f(x) = g(x)\ (0 \leq x \leq 1)$$

により定義する．このとき $\sim$ が同値関係であることを示せ．また，その商集合は区間 $[0, 1]$ 上の連続関数の集合とみなせることを示せ．

補充問題３２． $X_0 = \mathbf{R}_{\geq 0}$ を 0 以上の実数のなす集合とし，通常の数の大小で順序を入れる．直積集合 $X = X_0 \times X_0$ に X_0 の大小関係から辞書式順序を入れる．X の部分集合 E, F を

$$\begin{aligned} E &:= \{(x, y) \in X \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, \\ F &:= \left\{(x, y) \in X \mid y = \frac{1}{1 - x},\ 0 < x < 1\right\} \end{aligned}$$

によって定める．
(1) E, F を図示せよ．
(2) E, F の上限，下限，最大元，最小元を求めよ．

補充問題３３． $\mathbf{N}$ から $\mathbf{N}$ への順序同型写像は，恒等写像に限ることを示せ．また，$\mathbf{N}$ から $\mathbf{Q}$ への順序同型写像は存在しないことを示せ．

補充問題３４． 写像 $\Psi : (0, 1) \times (0, 1) \to \mathbf{R}$ を $x = 0.a_1a_2a_3\cdots$ （2 進展開）で $y = 0.b_1b_2b_3\cdots$ （２進展開）のとき，

$$\Psi(x, y) := 0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\cdots \text{(2 進展開)}$$

により定める．次を示せ．
(1) Ψ は単射である．

(2) $\mathrm{Card}((0,1)\times(0,1))=\aleph$.
(3) $\mathbf{R}^2$ の空でない開集合の濃度は $\aleph$ に等しい.

補充問題３５． 集合 X について，次の２つの条件は同値であることを示せ：
(i) X の濃度が可算無限以上である.
(ii) X の真部分集合 $X'\subsetneq X$ と全単射 $f:X'\to X$ が存在する.

補充問題３６． X を位相空間とし，$f:X\to\mathbf{R}$ を写像（関数）とする．f が点 $a\in X$ において連続であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対し，a の開近傍 U が存在して，$x\in U$ ならば $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ が成り立つときにいう．このとき，次の問いに答えよ.
(1) 写像 $f:X\to\mathbf{R}$ について，次の２条件 (a) (b) が互いに同値であることを証明せよ.
(a) f が（上の意味で）任意の点 $a\in X$ において連続である.
(b) f は連続である.（つまり，$\mathbf{R}$ の任意の開集合 V に対して，逆像 $f^{-1}(V)$ が X の開集合である.）
(2) $f,g:X\to\mathbf{R}$ を写像（関数）とする．f,g が $a\in X$ において連続ならば $f+g:X\to\mathbf{R}$, $(f+g)(x):=f(x)+g(x)$, も a で連続においてあることを示せ.

補充問題３７． $(X,\mathcal{O})$ を位相空間とし，X 上に同値関係 $\sim$ が与えられているとする．このとき商集合 $X/\sim$ の上の商位相 $\mathcal{O}'\subset\mathcal{P}(X/\sim)$ を「$U\in\mathcal{O}' \iff \pi^{-1}(U)\in\mathcal{O}$」で定義する．ただし，$\pi:X\to X/\sim$ を自然は射影とする．このとき，次の問いに答えよ.
(1) $\mathcal{O}'$ が $X/\sim$ 上の位相となることを示せ.
(2) 自然な射影 $\pi:X\to X/\sim$ が連続であることを証明せよ.

補充問題３８． $S^1=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2+y^2=1\}$ に $\mathbf{R}^2$ から相対位相を入れる．写像 $f:\mathbf{R}\to S^1$ を $f(x)=(\cos 2\pi x,\sin 2\pi x)$ で定める．このとき，次の問いに答えよ.
(1) f が連続写像であることを証明せよ.
(2) f が開写像であることを証明せよ．ただし，位相空間 X,Y の間の写像 $f:X\to Y$ が**開写像**であるとは，X の任意の開集合 U について，$f(U)$ が Y の開集合であるときにいう.
(3) $\mathbf{R}$ の同値関係 $\sim$ を「$x\sim x' \overset{\text{def}}{\iff} x-x'\in\mathbf{Z}$」で定めるとき，$f$ は同相写像（位相同型写像）$\overline{f}:\mathbf{R}/\sim\to S^1$ を誘導することを示せ.

補充問題３９． $\mathbf{R}$ に Euclid 位相を入れ，$\{0,1\}$ に $\mathbf{R}$ からの相対位相を入れるとき，次の問いに答えよ.
(0) $\{0,1\}$ 上の $\mathbf{R}$ からの相対位相は離散位相であることを示せ.
(1) 位相空間 X から $\{0,1\}$ への連続写像 $f:X\to\{0,1\}$ で全射であるものが存在するならば，X は連結でないことを示せ.
(2) 位相空間 X が連結でないならば，全射連続写像 $f:X\to\{0,1\}$ が存在することを示せ.

補充問題４０． $(X,\mathcal{O})$ を連結な位相空間とし，$f:X\to\mathbf{R}$ を連続関数とする．ある点 $a,b\in X$ について $f(a)\le f(b)$ とする．このとき，$[f(a),f(b)]\subset f(X)$ を示せ.（つまり，任意の $c'\in\mathbf{R}$, $f(a)\le c'\le f(b)$, に対して，$c\in X$ が存在して，$f(c)=c'$ が成り立つ.）

補充問題４１． 位相空間 X の２つの稠密な開集合 U_1,U_2 の共通部分 $U_1\cap U_2$ は稠密な開集合であることを示せ.

補充問題 その４ 基礎数学B

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (西暦２０１５年度後期)

以下の問題では，$\mathbf{R}^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots,$ には，特に断らない限り，通常の位相（Euclid 距離から定まる Euclid 位相）を入れる．

補充問題４２． X を位相空間，Y をハウスドルフ空間とする．次の問いに答えよ．
(1) 対角線集合 $\Delta = \{(y, y) \in Y \times Y \mid y \in Y\}$ は $Y \times Y$ の閉集合であることを示せ．
(2) $f, g : X \to Y$ を連続写像とする．$f \times g : X \times X \to Y \times Y$ を $(f \times g)(x, x') := (f(x), g(x')), (x, x' \in X)$ で定めるとき，$f \times g$ は連続写像であることを示せ．(ヒント：$Y \times Y$ の開集合のうち，$U \times V$ という形のものの逆像を調べて連続性が証明できる．)
(3) $f, g : X \to Y$ を連続写像とする．このとき，X の部分集合

$$C := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

が閉集合であることを示せ．

補充問題４３． 二つの位相空間 X, Y が同相（位相同型）であるならば,「X が連結 $\Longleftrightarrow$ Y が連結」が成り立つことを示せ．

補充問題４４． X を位相空間，$a \in X$ とする．次の条件が同値であることを証明せよ．
(1) X は弧状連結．すなわち，任意の $x, y \in X$ に対して，連続写像 $\phi : [0, 1] \to X$ が存在して，$\phi(0) = x, \phi(1) = y$ が成り立つ．
(2) 任意の点 $x \in X$ に対して，連続写像 $\phi : [0, 1] \to X$ が存在して，$\phi(0) = x, \phi(1) = a$ が成り立つ．

補充問題４５． 次の問いに答えよ．
(1) $\mathbf{R}^n$ が弧状連結であることを示せ．
(2) $S^1 \subset \mathbf{R}^2$ が弧状連結であることを示せ．

補充問題４６． $\mathbf{R}^n$ の開集合 U が連結ならば弧状連結であることを示せ．

補充問題４７． 位相空間 $(X, \mathcal{P}(X))$（離散位相）がコンパクトならば，X は有限集合であることを証明せよ．

補充問題４８． 次の問いに答えよ．
(1) 位相空間 X の部分集合 A について，次の条件 (a) (b) は互いに同値であることを証明せよ．
　(a) A に X からの相対位相を入れたとき，A がコンパクト位相空間である．
　(b) X の開集合族 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ を満たすとき，有限個の $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_k}$ を選んで，$A \subset V_{\lambda_1} \cup \cdots \cup V_{\lambda_k}$ とできる．(A は X のコンパクト部分集合)
(2) 位相空間 X の部分集合 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ がすべてコンパクトであるならば，その和集合 $\bigcup_{n=1}^{k} A_n$ もコンパクトとなることを証明せよ．

補充問題４９． 次の問いに答えよ．
(1) $\mathbf{R}$ はコンパクトでないことを（定義から直接）証明せよ．
(2) $\mathbf{R}$ の部分集合 $A = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\} \cup \{0\}$ がコンパクトであることを（定義から直接）証明せよ．(ヒント：A の任意の開被覆を考える)

補充問題５０． $\mathbf{R}$ 上の Zariski 位相 $\mathcal{O}_Z$ を，

$$\mathcal{O}_Z := \{\mathbf{R} \setminus A \quad | \quad A \text{ は有限集合または } A = \mathbf{R}\}$$

により定める．次の問に答えよ．
(1) $\mathcal{O}_Z$ は $\mathbf{R}$ 上の位相となること（開集合系の公理を満たすこと）を示せ．
(2) $(\mathbf{R}, \mathcal{O}_Z)$ がコンパクト位相空間となることを証明せよ．

補充問題５１． 次の問いに答えよ．
(1) X をコンパクト位相空間とし，$A \subset X$ を閉集合とするとき，A はコンパクトであることを示せ．
(2) $A \subset X$ をコンパクト部分集合とし，$f : X \to Y$ を連続写像とするとき $f(A)$ は Y のコンパクト部分集合であることを示せ．
(3) Y を Hausdorff 空間とし，$B \subset Y$ をコンパクト部分集合とするとき，B は Y の閉集合であることを示せ．
(4) X をコンパクト位相空間，Y を Hausdorff 位相空間とする．$f : X \to Y$ が全単射で連続とするとき，f は同相写像であることを証明せよ．

補充問題５２． $(X, \mathcal{O})$ を Hausdorff 位相空間，$A \subset X$ をコンパクト集合，$a \in X \setminus A$ とする．このとき，X の開集合 U, V で，条件 $a \in U, A \subset V, U \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在することを示せ．

補充問題５３． 集合 X 上に，$\mathcal{O}_1 \supset \mathcal{O}_2$ を満たす開集合系 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ があるとする．位相空間 $(X, \mathcal{O}_1)$ がコンパクトであり，$(X, \mathcal{O}_2)$ が Hausdorff 空間であるならば，$\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ となることを証明せよ．

補充問題５４． $(X, \mathcal{O})$ を Hausdorff かつコンパクトな空でない位相空間，$f : X \to X$ を連続写像とする．次の問いに答えよ．
(1) 集合族（集合の集合）$\mathcal{K} := \{M \mid M \subset X, X \text{ は空でないコンパクト集合}, f(M) = M\}$ 上に順序 $\leq$ を，「$M_1 \leq M_2 \Leftrightarrow M_2 \subset M_1$」で定める．このとき $(\mathcal{K}, \leq)$ が帰納的順序集合になること（つまり，$\leq$ が順序であること，および，$\mathcal{K} \neq \emptyset$，かつ，$\mathcal{K}$ の空でない全順序部分集合が上限を持つこと）を示せ．
(2) Zorn の補題（帰納的順序集合は極大元をもつ）を用いて，$f(K) = K$ となるような空でないコンパクト集合 $K \subset X$ が存在することを示せ．

補充問題５５． $(X, \mathcal{O})$ を Hausdorff かつコンパクトな空でない位相空間，$f : X \to X$ を連続写像とする．このとき，$f(K_1) = K_2, f(K_2) = K_1$ を満たす空でないコンパクト集合 $K_1, K_2 \subset X$ が存在することを示せ．

以上．