補充問題 その３ 基礎数学Ｂ

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (西暦２０１５年度後期)

以下の問題では，$\mathbf{R}^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots,$ には，特に断らない限り，通常の位相（Euclid 距離から定まる Euclid 位相）を入れる．

補充問題２９． X を実数列全体のなす集合とする．X の上の 2 項関係 R を，X の要素 $a = (a_k)_{k=1}^{\infty}, b = (b_k)_{k=1}^{\infty}$ に対して，

$$aR\,b \overset{\text{def.}}{\iff} \text{たかだか有限個の } k \text{ を除くと } a_k = b_k \text{ が成り立つ}$$

により定義する．R が X の上の同値関係になることを示せ．

解説.
(i) $a \in X$ とする．任意の k について，$a_k = a_k$ であるから，aRa.
(ii) $a, b \in X$, aRb とする．たかだか有限個の k を除いて，$a_k = b_k$ であるから，$b_k = a_k$ が成り立つ．したがって，bRa.
(iii) $a, b, c \in X$, aRb, bRc とする．有限集合 $E_1 \subset \mathbf{N}$ があって，$k \notin E_1$ ならば，$a_k = b_k$ が成り立つ．また，有限集合 $E_2 \subset \mathbf{N}$ があって，$k \notin E_2$ ならば，$b_k = c_k$ が成り立つ．このとき，$E_1 \cup E_2 \subset \mathbf{N}$ は有限集合であって，$k \notin E_1 \cup E_2$ ならば，$a_k = c_k$ が成り立つ．したがって，aRc.
以上により，R は同値関係である．

補充問題３０． $X = \mathcal{P}(\mathbf{N}) \setminus \{\emptyset\} = \{A \mid A \subset \mathbf{N}, A \neq \emptyset\}$ とおく．X の上の 2 項関係 $\sim$ を，$A, B \in X$ に対し，

$$A \sim B \overset{\text{def.}}{\iff} A \text{ と } B \text{ の最小の元が一致する}$$

により定義する．このとき $\sim$ が同値関係であることを示し，商集合がどのような集合であるか考察せよ．

解説.
$\min A$ で，A の最小元を表すことにする．
(i) $A \in X$ とする．$\min A = \min A$ だから，$A \sim A$.
(ii) $A, B \in X, A \sim B$ とする．$\min A = \min B$ であるから，$\min B = \min A$ である．したがって $B \sim A$.
(iii) $A, B, C \in X, A \sim B, B \sim C$ とする．$\min A = \min B, \min B = \min C$ だから，$\min A = \min C$. よって $A \sim C$.
以上により，$\sim$ は同値関係である．
$A \in X$ とする．このとき，ただ 1 つの $\mathbf{N}$ の要素からなる集合 $\{\min A\}$ に対して，$A \sim \{\min A\}$ である．したがって，

$$X/\!\sim\, = \{[\{n\}] \mid n \in \mathbf{N}\} = \{[\{1\}], [\{2\}], [\{3\}], \ldots\}$$

である．ただし，$[\cdot]$ は同値類を表す．いま，写像 $\varphi : \mathbf{N} \to X/\!\sim$ を $\varphi(n) = [\{n\}]$ で定めると，φ は全単射である．したがって，$X/\!\sim$ は可算無限集合である．
（もちろん，考察にはいろいろある．皆さんがんばっていろいろ考察してください.）

補充問題３１． $C^0(\mathbf{R})$ を $\mathbf{R}$ 上の実数値連続関数の全体のなす集合とする．$C^0(\mathbf{R})$ 上の 2 項関係 $\sim$ を

$$f \sim g \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} f(x) = g(x) \ (0 \leq x \leq 1)$$

により定義する．このとき $\sim$ が同値関係であることを示せ．また，その商集合は区間 $[0,1]$ 上の連続関数の集合とみなせることを示せ．

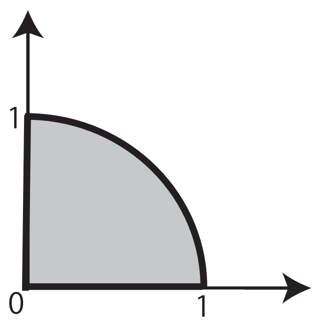
解説省略.

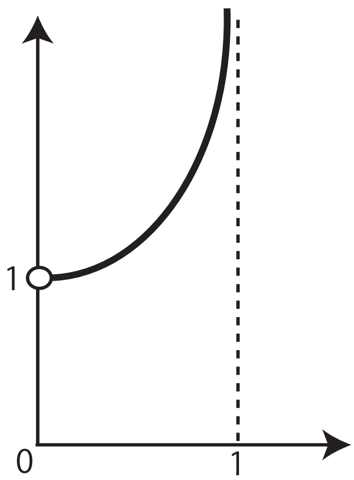
補充問題３２． $X_0 = \mathbf{R}_{\geq 0}$ を 0 以上の実数のなす集合とし，通常の数の大小で順序を入れる．直積集合 $X = X_0 \times X_0$ に X_0 の大小関係から辞書式順序を入れる．X の部分集合 E, F を

$$\begin{aligned} E &:= \{(x,y) \in X \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, \\ F &:= \left\{(x,y) \in X \mid y = \frac{1}{1-x},\ 0 < x < 1\right\} \end{aligned}$$

によって定める．
(1) E, F を図示せよ．
(2) E, F の上限，下限，最大元，最小元を求めよ．

解説.
(1)





(2) E の最大元 $(1,0)$ 最小元 $(0,0)$, 上限 $(1,0)$, 下限 $(0,0)$.
実際，E の上界は，$\{(x,y) \mid 1 \leq x,\ 0 \leq y\}$ で与えられる．その最小元が存在して $(1,0)$ に等しいので，上限は $(1,0)$ である．しかも $(1,0) \in E$ であるから，$(1,0)$ は E の最大元である．E の下界は，$\{(0.0)\}$ である．したがって，その最大元 $(0,0)$ が E の下限であり，最小元である．

　F の最大元は存在しない．最小元も存在しない．上限は $(1,0)$，下限は存在しない．
実際，F の上界は $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x,\ 0 \leq y\}$ であるから，上界の最小元 $(1,0)$ が F 上限である．$(1,0) \notin F$ だから，F の最大元は存在しない．
F の下界は $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 0, 0 \leq y\}$ である．$x > 0$ のとき，(x,y) は F の下界に属さないからである．F の点 $(\frac{x}{2}, \frac{1}{1-\frac{x}{2}})$ の方が (x,y) より（辞書式順序で）小さいからである．
したがって，F の下界に最大元はないので，F の下限は存在しない．F の最小元も存在しない．

補充問題３３． $\mathbf{N}$ から $\mathbf{N}$ への順序同型写像は，恒等写像に限ることを示せ．また，$\mathbf{N}$ から $\mathbf{Q}$ への順序同型写像は存在しないことを示せ．

解説.
(1)
$f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ を順序同型写像とする．$f(1) \in \mathbf{N}$ は $\mathbf{N}$ の最小元である．
なぜなら，（f が全射だから）任意の $m \in \mathbf{N}$ に対し，$n \in \mathbf{N}$ が存在して，$m = f(n)$ となる．$1 \leq n$ であり f が順序を保つから $f(1) \leq f(n) = m$ となるからである．
よって $f(1) = 1$ である．
次に $f(2)$ を考える．f が単射だから，$f(2) \neq 1$ である．上と同様の議論で，$f(2)$ は $\mathbf{N} \setminus \{1\}$ の最小元であり，$f(2) = 2$ がわかる．
以下同様に考えて，f が恒等写像であることがわかる．
以上の説明を数学的帰納法を用いて，より厳密に書いてみよう．
$n \in \mathbf{N}$ に関する次の命題を数学的帰納法で証明する：
$P(n)$: $1 \leq i \leq n$ である任意の $i \in \mathbf{N}$ に対し，$f(i) = i$.
$P(1)$ が成り立つことは，上に示した通りである．
$n = k$ のとき，$P(k)$ が成り立つと仮定する．
$P(k+1)$ を考える．f が単射であるから，$f(k+1) \notin \{1, 2, \ldots, k\}$ である．f が全射であり，順序を保つから，$k+1 \leq m$ である任意の $m \in \mathbf{N}$ に対し，$f(k+1) \leq m$ である．したがって，$f(k+1)$ は $\mathbf{N} \setminus \{1, 2, \ldots, k\}$ の最小元である．したがって，$f(k+1) = k+1$ である．よって，$P(k+1)$ が成り立つ．
数学的帰納法により，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して，$P(n)$ が成り立つ．
したがって，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して，$f(n) = n$ が成り立つ．
したがって，f は恒等写像である．
別解. f が恒等写像でないと仮定して矛盾を導く．f が恒等写像でないと仮定し，

$$A := \{m \in \mathbf{N} \mid f(m) \neq m\}$$

とおく．仮定より $A \neq \emptyset$ である．A の最小元を n とする．n の最小性から，$1 \leq i \leq n-1$ である任意の i について，$f(i) = i$ が成り立つ．f の単射性から，$n-1 \leq f(n)$ で $f(n) \neq n$ だから，$n{+}1 \leq f(n)$ となる．f の全射性から $n = f(m)$ となる $m \in \mathbf{N}$ が存在するが，$m \notin \{1, 2, \ldots, n{-}1\}$ だから $n \leq m$ となるはずである．f は順序を保つから，$f(n) \leq f(m)$ したがって，$n+1 \leq n$ が導かれる．これは矛盾である．したがって，$A = \emptyset$ である．よって，f は恒等写像である．

(2)
解１．（$\mathbf{Q}$ に最小元が存在しないことを使った証明.）
順序同型写像 $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Q}$ が存在したとする．$f(1) \in \mathbf{Q}$ に対し，$r \in \mathbf{Q}$ が存在して，$r < f(1)$ となる.（たとえば，$r = f(1) - 1$ と取る.）f は全射だから，$r = f(n)$ となる $n \in \mathbf{N}$ が存在する．$1 \leq n$ で，f は順序を保つから，$f(1) \leq f(n)$ となる．すると，$f(1) \leq r$ となり，$r < f(1)$ に矛盾する．したがって，背理法により，$\mathbf{N}$ から $\mathbf{Q}$ への順序同型写像は存在しない．
解２．（$\mathbf{Q}$ の異なる２元の間に他の元がある，という性質を使った証明.）
順序同型写像 $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Q}$ が存在したとする．f は順序を保ち，単射であるから，$f(1) < f(2)$ である．$r = \frac{f(1)+f(2)}{2}$ とおくと，$r \in \mathbf{Q}$ である．$f(1) < r < f(2)$ である．f は全射だから，$r = f(n)$ となる $n \in \mathbf{N}$ が存在する．f は単射だから，$n \neq 1, n \neq 2$ である．つまり，$2 < n$ である．よっ

て，$f(2) \leq f(n) = r$ である．これは，$r < f(2)$ に矛盾する．したがって，背理法により，$\mathbf{N}$ から $\mathbf{Q}$ への順序同型写像は存在しない．

補充問題３４． 写像 $\Psi : (0,1) \times (0,1) \to \mathbf{R}$ を $x = 0.a_1a_2a_3\cdots$ （2 進展開）で $y = 0.b_1b_2b_3\cdots$ （2 進展開）のとき，

$$\Psi(x,y) := 0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\cdots \text{(2 進展開)}$$

により定める．次を示せ．
(1) Ψ は単射である．
(2) $\mathrm{Card}((0,1)\times(0,1)) = \aleph$.
(3) $\mathbf{R}^2$ の空でない開集合の濃度は $\aleph$ に等しい．

解説.
(1)
$\Psi(x,y) = 0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\cdots$ とし，$\Psi(x',y') = 0.a'_1b'_1a'_2b'_2a'_3b'_3\cdots$ とし，$\Psi(x,y) = \Psi(x',y')$ とする．このとき，２進展開の一意性から，$a_1 = a'_1, b_1 = b'_1, a_2 = a'_2, b_2 = b'_2, a_3 = a'_3, b_3 = b'_3, \ldots$ である．Ψ の定義から，$x' = 0.a'_1a'_2a'_3\cdots, y' = 0.b'_1b'_2b'_3\cdots$ である．したがって，$x = x', y = y'$ となる．したがって，Ψ は単射である．
注. $\Psi((0,1)\times(0,1)) = (0,1)$ ではない．$z = 0.101010\cdots$ (２進展開）とすると，$z \in (0,1)$ だが，$\Psi(x,y) = z$ となるような $(x,y) \in (0,1)\times(0,1)$ は存在しない．
(2)
(1) から，濃度に関する順序（一方から他方に単射が存在するという順序）について，$\mathrm{Card}((0,1)\times(0,1)) \leq \mathrm{Card}(\mathbf{R}) = \aleph$ が成り立つ．一方，$\Phi : \mathbf{R} \to (0,1)\times(0,1)$ を，$\Phi(x) := (\mathrm{Tan}^{-1}(\frac{\pi}{2}(x-1)), 0)$ と定めれば，Φ は単射である．(単射の作り方はいろいろある.）したがって，$\aleph = \mathrm{Card}(\mathbf{R}) \leq \mathrm{Card}((0,1)\times(0,1))$ が成り立つ．よって Bernstein の定理により，$\mathrm{Card}((0,1)\times(0,1)) = \aleph$ が成り立つ．
(3)
$U \subset \mathbf{R}^2$ を任意の空でない開集合とする．$z = (x_0, y_0) \in U$ とする．U は開集合だから $\varepsilon > 0$ が存在して，$B(z,\varepsilon) \subset U$ となる．そこで，$f : (0,1)\times(0,1) \to U$ を，$f(x,y) := (x_0 + \varepsilon(x - \frac{1}{2}), y_0 + \varepsilon(y - \frac{1}{2}))$ とおけば，f は単射となる．(単射の作り方はいろいろある.）したがって，濃度の不等式 $\mathrm{Card}((0,1)\times(0,1)) \leq \mathrm{Card}(U)$ が成り立つ．
一方，$g : U \to (0,1)\times(0,1)$ を $g(x,y) := \left(\mathrm{Tan}^{-1}(\frac{\pi}{2}(x-1)), \mathrm{Tan}^{-1}(\frac{\pi}{2}(y-1))\right)$ と定まると，g は単射である．(単射の作り方はいろいろある.）したがって，濃度の不等式 $\mathrm{Card}(U) \leq \mathrm{Card}((0,1)\times(0,1))$ が成り立つ．よって，Bernstein の定理により，濃度の等式 $\mathrm{Card}(U) = \mathrm{Card}((0,1)\times(0,1))$ が成り立つ．よって，(2) から $\mathrm{Card}(U) = \aleph$ が成り立つ． □

補充問題３５． 集合 X について，次の２つの条件は同値であることを示せ：
(i) X の濃度が可算無限以上である．
(ii) X の真部分集合 $X' \subsetneq X$ と全単射 $f : X' \to X$ が存在する．

解説省略.

補充問題３６． X を位相空間とし，$f : X \to \mathbf{R}$ を写像（関数）とする．f が点 $a \in X$ において連続であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，a の開近傍 U が存在して，$x \in U$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つときにいう．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 写像 $f : X \to \mathbf{R}$ について，次の２条件 (a) (b) が互いに同値であることを証明せよ．
(a) f が（上の意味で）任意の点 $a \in X$ において連続である．
(b) f は連続である．(つまり，$\mathbf{R}$ の任意の開集合 V に対して，逆像 $f^{-1}(V)$ が X の開集合である．)
(2) $f, g : X \to \mathbf{R}$ を写像（関数）とする．f, g が $a \in X$ において連続ならば $f + g : X \to \mathbf{R}, (f+g)(x) := f(x) + g(x)$, も a で連続においてあることを示せ．

解説省略.

補充問題３７． $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし，X 上に同値関係 $\sim$ が与えられているとする．このとき商集合 $X/{\sim}$ の上の商位相 $\mathcal{O}' \subset \mathcal{P}(X/{\sim})$ を「$U \in \mathcal{O}' \quad \Longleftrightarrow \quad \pi^{-1}(U) \in \mathcal{O}$」で定義する．ただし，$\pi : X \to X/{\sim}$ を自然は射影とする．このとき，次の問いに答えよ．
(1) $\mathcal{O}'$ が $X/{\sim}$ 上の位相となることを示せ．
(2) 自然な射影 $\pi : X \to X/{\sim}$ が連続であることを証明せよ．

解説． (1) は，演習プリント２６の２番の解説を参照せよ．(2) は，$\mathcal{O}'$ の定義と連続写像の定義から導かれる．

補充問題３８． $S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ に $\mathbf{R}^2$ から相対位相を入れる．写像 $f : \mathbf{R} \to S^1$ を $f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ で定める．このとき，次の問いに答えよ．
(1) f が連続写像であることを証明せよ．
(2) f が開写像であることを証明せよ．ただし，位相空間 X, Y の間の写像 $f : X \to Y$ が**開写像**であるとは，X の任意の開集合 U について，$f(U)$ が Y の開集合であるときにいう．
(3) $\mathbf{R}$ の同値関係 $\sim$ を「$x \sim x' \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} x - x' \in \mathbf{Z}$」で定めるとき，$f$ は同相写像（位相同型写像）$\overline{f} : \mathbf{R}/{\sim} \to S^1$ を誘導することを示せ．

解説省略.

補充問題３９． $\mathbf{R}$ に Euclid 位相を入れ，$\{0, 1\}$ に $\mathbf{R}$ からの相対位相を入れるとき，次の問いに答えよ．
(0) $\{0, 1\}$ 上の $\mathbf{R}$ からの相対位相は離散位相であることを示せ．
(1) 位相空間 X から $\{0, 1\}$ への連続写像 $f : X \to \{0, 1\}$ で全射であるものが存在するならば，X は連結でないことを示せ．
(2) 位相空間 X が連結でないならば，全射連続写像 $f : X \to \{0, 1\}$ が存在することを示せ．

解説省略.

補充問題４０． $(X, \mathcal{O})$ を連結な位相空間とし，$f : X \to \mathbf{R}$ を連続関数とする．ある点 $a, b \in X$ について $f(a) \leq f(b)$ とする．このとき，$[f(a), f(b)] \subset f(X)$ を示せ．(つまり，任意の $c' \in \mathbf{R}$, $f(a) \leq c' \leq f(b)$, に対して，$c \in X$ が存在して，$f(c) = c'$ が成り立つ．)
補充問題４０の改題． $(X, \mathcal{O})$ を連結な位相空間とし，$f : X \to \mathbf{R}$ を連続関数とする．ある点 $a, b \in X$ について $f(a) < f(b)$ とする．このとき，$[f(a), f(b)] \subset f(X)$ を示せ．(つまり，任意の $c' \in \mathbf{R}$, $f(a) \leq c' \leq f(b)$, に対して，$c \in X$ が存在して，$f(c) = c'$ が成り立つ．)
（ヒント：位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が「連結でない」$\Longleftrightarrow \exists U_1, U_2 \in \mathcal{O}, X = U_1 \cup U_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset, U_1 \neq \emptyset, U_2 \neq \emptyset.$)
（注：問題 8-1 の主張は，いわゆる中間値の定理（の一般化）である．）

解説.
X が連結で f が連続だから，$f(X)$ は $\mathbf{R}$ の連結部分集合である．$f(a), f(b) \in f(X)$ である．
仮に，$[f(a), f(b)] \not\subset f(X)$ を仮定して矛盾を導く．$\exists c', f(a) \le c' \le f(b),\ c' \notin f(X)$ とおく．
$c' \ne f(a), c' \ne f(b)$ である．$V_1 = (-\infty, c'), V_2 = (c', \infty)$ とする．このとき，
V_1, V_2 は $\mathbf{R}$ の開集合であり，$f(X) \subset V_1 \cup V_2, f(X) \cap V_1 \cap V_2 = \emptyset$ であり，さらに，
$f(X) \cap V_1 \ne \emptyset, f(X) \cap V_2 \ne \emptyset$ が成り立つ．
実際，$f(a) \in f(X) \cap V_1$ であり，$f(b) \in f(X) \cap V_2$ である．
これは，$f(X)$ が連結集合であることに矛盾する．したがって，$[f(a), f(b)] \subset f(X)$ が成り立つ．

補充問題４１． 位相空間 X の２つの稠密な開集合 U_1, U_2 の共通部分 $U_1 \cap U_2$ は稠密な開集合であることを示せ．

解説. X の部分集合 A が稠密であるとは,「$\overline{A} = X$」が成り立つこと，すなわち,「任意の $x \in X$ が A の触点であること」すなわち,「任意の $x \in X$ と任意の X の開集合 U について，$x \in U$ ならば $U \cap A \ne \emptyset$」が成り立つことである．
さて，U_1, U_2 を X の稠密な開集合とする．$x \in X, U$ を X の開集合とする．U_1 が稠密なので $U \cap U_1 \ne \emptyset$ である．$y \in U \cap U_1$ が存在する．このとき，$U \cap U_1$ は X の開集合であり，U_2 が稠密だから，$(U \cap U_1) \cap U_2 = U \cap (U_1 \cap U_2) \ne \emptyset$ である．よって，$U_1 \cap U_2$ は稠密である．また，$U_1 \cap U_2$ は開集合である．したがって，$U_1 \cap U_2$ は稠密な開集合である．

補充問題 その４ 基礎数学B

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (西暦２０１５年度後期)

以下の問題では，$\mathbf{R}^n, n = 1, 2, 3, \dots,$ には，特に断らない限り，通常の位相（Euclid 距離から定まる Euclid 位相）を入れる．

補充問題４２． X を位相空間，Y をハウスドルフ空間とする．次の問いに答えよ．
(1) 対角線集合 $\Delta = \{(y, y) \in Y \times Y \mid y \in Y\}$ は $Y \times Y$ の閉集合であることを示せ．
(2) $f, g : X \to Y$ を連続写像とする．$f \times g : X \times X \to Y \times Y$ を $(f \times g)(x, x') := (f(x), g(x')), (x, x' \in X)$ で定めるとき，$f \times g$ は連続写像であることを示せ．(ヒント：$Y \times Y$ の開集合のうち，$U \times V$ という形のものの逆像を調べて連続性が証明できる.)
(3) $f, g : X \to Y$ を連続写像とする．このとき，X の部分集合

$$C := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

が閉集合であることを示せ．

解説. (1) は演習プリント２６の１番の解説を参照せよ．(2), (3) は，(1) とヒントと連続写像の定義，直積位相の定義を組み合わせれば解ける．

補充問題４３． 二つの位相空間 X, Y が同相（位相同型）であるならば,「X が連結 $\Longleftrightarrow$ Y が連結」が成り立つことを示せ．

解説. 「同相」の定義と,「連結」の定義を組み合わせれば解くことができます.

補充問題４４. X を位相空間，$a \in X$ とする．次の条件が同値であることを証明せよ.
(1) X は弧状連結．すなわち，任意の $x, y \in X$ に対して，連続写像 $\phi : [0,1] \to X$ が存在して，$\phi(0) = x, \phi(1) = y$ が成り立つ.
(2) 任意の点 $x \in X$ に対して，連続写像 $\phi : [0,1] \to X$ が存在して，$\phi(0) = x, \phi(1) = a$ が成り立つ.

解説. (1) $\Longrightarrow$ (2) は直ちに導かれます．(2) $\Longrightarrow$ (2) は，x から a を経由して，y に向かう「弧」を，$[0,1]$ からの連続写像になるようにパラメータ付けます.

補充問題４５. 次の問いに答えよ.
(1) $\mathbf{R}^n$ が弧状連結であることを示せ.
(2) $S^1 \subset \mathbf{R}^2$ が弧状連結であることを示せ.

解説. 具体的に式で書かれる曲線で２点をつなげます.

補充問題４６. $\mathbf{R}^n$ の開集合 U が連結ならば弧状連結であることを示せ.

解説. U 上の関係 $\sim$ を,

$$x \sim y \Longleftrightarrow \exists \phi : [0,1] \to \mathbf{R}^n \text{ 連続写像 } \phi(0) = x, \phi(1) = y, \phi([0,1]) \subset U$$

により定めると，同値関係になる．このとき，各同値類は開集合になることがわかり，もし，U が弧状連結でないと仮定すると，同値類が２つ以上生じ，U が連結であることに反することが証明できます.

補充問題４７. 位相空間 $(X, \mathcal{P}(X))$（離散位相）がコンパクトならば，X は有限集合であることを証明せよ.

解説. 離散位相の定義と,「コンパクト」の定義から導くことができます.

補充問題４８. 次の問いに答えよ.
(1) 位相空間 X の部分集合 A について，次の条件 (a) (b) は互いに同値であることを証明せよ.
(a) A に X からの相対位相を入れたとき，A がコンパクト位相空間である.
(b) X の開集合族 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ を満たすとき，有限個の $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_k}$ を選んで，$A \subset V_{\lambda_1} \cup \cdots \cup V_{\lambda_k}$ とできる.（A は X のコンパクト部分集合）
(2) 位相空間 X の部分集合 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ がすべてコンパクトであるならば，その和集合 $\bigcup_{n=1}^{k} A_n$ もコンパクトとなることを証明せよ.

解説.
(1) (a) $\Longrightarrow$ (b) を示す.
A の X における**任意の**開被覆 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ($A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$, V_λ は X の開集合) をとる．$A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda}(V_\lambda \cap A)$ である．$V_\lambda \cap A$ は相対位相に関して，A の開集合であり，$\{V_\lambda \cap A\}_{\lambda \in \Lambda}$ は A の A における開被覆である．A はコンパクト空間であるから，有限個の $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ が存在して，$A \subset V_{\lambda_1 \cap A} \cup \cdots \cup V_{\lambda_p \cap A}$ となる.

このとき，$A \subset V_{\lambda_1} \cup \cdots \cup V_{\lambda_p}$ が成り立つ．したがって，A はコンパクト部分集合である．
(b) $\Longrightarrow$ (a) を示す．
A の A における**任意の**開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ($A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, U_λ は A の開集合）をとる．U_λ は A の開集合であるから，X の開集合 V_λ があって，$U_\lambda = V_\lambda \cap A$ となる．このとき，$A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ である．A はコンパクト部分集合だから，有限個の $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ が存在して，$A \subset V_{\lambda_1} \cup \cdots \cup V_{\lambda_p}$ となる．このとき，$A = (V_{\lambda_1} \cap A) \cup \cdots \cup (V_{\lambda_p} \cap A) = U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_p}$ となる．したがって，A はコンパクト位相空間である．
(2)
$\bigcup_{n=1}^k A_n$ の**任意の**開被覆 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ (つまり，$\bigcup_{n=1}^k A_n \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$, V_λ は X の開集合）をとる．このとき，各 A_n に対し，$\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は，A_n の開被覆であり，A_n はコンパクトであるから，有限集合 $\Lambda_n \subset \Lambda$ が存在して，$A_n \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda_n} V_\lambda$ が成り立つ．このとき，$\Lambda' := \bigcup_{n=1}^k \Lambda_n \subset \Lambda$ は有限集合であり，$\bigcup_{n=1}^k A_n \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} V_\lambda$ となる．すなわち，$\bigcup_{n=1}^k A_n$ の任意の開被覆が有限部分開被覆をもつ．したがって，$\bigcup_{n=1}^k A_n$ はコンパクトである．

補充問題４９． 次の問いに答えよ．
(1) $\mathbf{R}$ はコンパクトでないことを（定義から直接）証明せよ．
(2) $\mathbf{R}$ の部分集合 $A = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\} \cup \{0\}$ がコンパクトであることを（定義から直接）証明せよ．(ヒント：A の任意の開被覆を考える)

解説
(1)
$n \in \mathbf{N}$ に対し，$U_n = (-\infty, n) \subset \mathbf{R}$ とおく．すると，$\{U_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は $\mathbf{R}$ の開被覆となる．$\mathbf{R} = \cup_{n\in\mathbf{N}} U_n$ である．$\{U_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ から有限個の $U_{n_1}, \ldots, U_{n_p}$ を選んで，$\mathbf{R} = U_{n_1} \cup \cdots \cup U_{n_p}$ と覆うことはできない．
なぜなら，もし覆えるとすると，$N = \max\{n_1, \ldots, n_p\}$ とおくと，$\mathbf{R} \subset U_{n_1} \cup \cdots \cup U_{n_p} = U_N = (-\infty, N)$ となり矛盾が導かれるからである．
よって，$\mathbf{R}$ はコンパクトではい．
(2)
A の**任意の**開被覆 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ($A \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$, V_α は $\mathbf{R}$ の開集合) をとる．
ある $\alpha_0 \in \Lambda$ があって，$0 \in U_{\alpha_0}$ となる．U_{α_0} は開集合であるから，$\delta > 0$ があって，$(-\delta, \delta) \subset U_{\alpha_0}$ となる．$k \in \mathbf{N}$ を $\frac{1}{k} < \delta$ となるようにとれば，$n \geq k$ ならば $\frac{1}{n} \in U_{\alpha_0}$ となる．一方，$n = 1, 2, \ldots, k-1$ に対しては，それぞれ，$\frac{1}{n} \in U_{\alpha_n}$ となる $\alpha_n \in \Lambda$ が存在する．このとき，

$$A \subset U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \cdots \cup U_{\alpha_{k-1}} \cup U_{\alpha_0}$$

となる．このように有限部分被覆が存在する．したがって，A はコンパクトである．

補充問題５０． $\mathbf{R}$ 上の Zariski 位相 $\mathcal{O}_Z$ を，

$$\mathcal{O}_Z := \{\mathbf{R} \setminus A \quad | \quad A \text{ は有限集合または } A = \mathbf{R}\}$$

により定める．次の問に答えよ．
(1) $\mathcal{O}_Z$ は $\mathbf{R}$ 上の位相となること（開集合系の公理を満たすこと）を示せ．
(2) $(\mathbf{R}, \mathcal{U}_Z)$ がコンパクト位相空間となることを証明せよ．

解説省略．

補充問題５１． 次の問いに答えよ．
(1) X をコンパクト位相空間とし，$A \subset X$ を閉集合とするとき，A はコンパクトであることを示せ．
(2) $A \subset X$ をコンパクト部分集合とし，$f : X \to Y$ を連続写像とするとき $f(A)$ は Y のコンパクト部分集合であることを示せ．
(3) Y を Hausdorff 空間とし，$B \subset Y$ をコンパクト部分集合とするとき，B は Y の閉集合であることを示せ．
(4) X をコンパクト位相空間，Y を Hausdorff 位相空間とする．$f : X \to Y$ が全単射で連続とするとき，f は同相写像であることを証明せよ．

解説． (1), (2), (3) は基本的な問題である．教科書，講義ノートを参照してください．(4) は，演習プリント２５の２番の解説を参考にしてください．

補充問題５２． $(X, \mathcal{O})$ を Hausdorff 位相空間，$A \subset X$ をコンパクト集合，$a \in X \setminus A$ とする．このとき，X の開集合 U, V で，条件 $a \in U, A \subset V, U \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在することを示せ．

補充問題５３． 集合 X 上に，$\mathcal{O}_1 \supset \mathcal{O}_2$ を満たす開集合系 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ があるとする．位相空間 $(X, \mathcal{O}_1)$ がコンパクトであり，$(X, \mathcal{O}_2)$ が Hausdorff 空間であるならば，$\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ となることを証明せよ．

解説省略． ただし，補充問題５１ (4) を恒等写像 $\mathrm{id}_X : X \to X$ に当てはめると導くことができます．

補充問題５４． $(X, \mathcal{O})$ を Hausdorff かつコンパクトな空でない位相空間，$f : X \to X$ を連続写像とする．次の問いに答えよ．
(1) 集合族（集合の集合）$\mathcal{K} := \{M \mid M \subset X, X$ は空でないコンパクト集合$, f(M) = M\}$ 上に順序 $\leq$ を，「$M_1 \leq M_2 \Leftrightarrow M_2 \subset M_1$」で定める．このとき $(\mathcal{K}, \leq)$ が帰納的順序集合になること（つまり，$\leq$ が順序であること，および，$\mathcal{K} \neq \emptyset$，かつ，$\mathcal{K}$ の空でない全順序部分集合が上限を持つこと）を示せ．
(2) Zorn の補題（帰納的順序集合は極大元をもつ）を用いて，$f(K) = K$ となるような空でないコンパクト集合 $K \subset X$ が存在することを示せ．

解説省略．

補充問題５５． $(X, \mathcal{O})$ を Hausdorff かつコンパクトな空でない位相空間，$f : X \to X$ を連続写像とする．このとき，$f(K_1) = K_2, f(K_2) = K_1$ を満たす空でないコンパクト集合 $K_1, K_2 \subset X$ が存在することを示せ．
解説省略．

以上．