基礎数学B講義 補充演習問題 その１

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (２０１５年度２学期)

以下の問題では，$\mathbf{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$（正の整数全体の集合，0 以外の自然数全体の集合）とする．また，$\mathbf{Z}$ は整数全体の集合，$\mathbf{Q}$ は有理数全体の集合，$\mathbf{R}$ は実数全体の集合，$\mathbf{C}$ は複素数全体の集合を表す．$\mathbf{R}^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots,$ には，特に断らない限り，通常の位相（Euclid 距離から定まる Euclid 位相）を入れる．

補充問題１． 次の問いに答えよ．
(1) $A = \{2n \mid n \in \mathbf{N}\}$ とおくと，

$$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 2 \text{ または } x - 2 \in A\}$$

を満たすことを証明せよ．
(2) $\mathbf{N}$ の部分集合 A で，

$$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 2 \text{ または } x - 2 \in A\}$$

を満たすものをすべて求めよ．

補充問題２． A_n を次のような集合とするとき，$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ を求めよ．

$$A_n = \{x \in \mathbf{R} \mid \frac{1}{n} < x \leq 2 - \frac{1}{n}\}.$$

補充問題３． 写像 $f : X \to Y$, $A, B \subset X$ について，次の問いに答えよ．
(1) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ が成り立つことを示せ．
(2) f が単射ならば，$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ が成り立つことを示せ．

補充問題４． X, Y を集合，$f : X \to Y$ を写像とし，A' を Y の部分集合とするとき，$f(f^{-1}(A')) = A' \cap f(X)$ を示せ．

補充問題５． X, Y を集合，$f : X \to Y$ を写像とし，A を X の部分集合とするとき，$f^{-1}(f(A)) \supset A$ を示せ．また，$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2, A = [0, 1]$ （ゼロイチ区間）という例について，$f(A)$ および $f^{-1}(f(A))$ を求め，$f^{-1}(f(A)) \neq A$ となることを確認せよ．

補充問題６． 与えられた集合 X, Y に対して，全単射 $f : X \to Y$ の例を作れ．
(1) $X = \mathbf{Z},\ Y = \mathbf{N}.$　(2) $X = \mathbf{R},\ Y = (0, \infty).$　(3) $X = (0, 1)$, $Y = (-1, 2).$
(4) $X = [0, \infty),\ Y = (0, \infty).$

補充問題７． 写像 $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ について，次をそれぞれ示せ．
(1) $g \circ f$ が全射ならば g が全射である．
(2) $g \circ f$ が単射ならば f が単射である．

補充問題８． 次の問いに答えよ．
(1) 写像 $f : X \to Y$ について，f のグラフを $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$ で定義する．２つの写像 $f, g : X \to Y$ について，

$$\Gamma_f = \Gamma_g \text{（集合の相等）} \iff f = g \text{（写像の相等）}$$

という同値性が成立することを証明せよ．
(2) 写像 $f : X \to Y$ に対して，$\Gamma_f^{-1} := \{(f(x), x) \in Y \times X \mid x \in X\}$ とおく．いま，写像 $g : Y \to X$ について，$\Gamma_f^{-1} = \Gamma_g$ が成り立っているとするとき，f, g はどういう関係にあるか述べよ．

補充問題９． X を集合とする．$E = \{0, 1\}$ とおく．部分集合 $A \subset X$ に対して，写像 $\Phi_A : X \to E$ を $\Phi_A(x) = 1\ (x \in A), \Phi_A(x) = 0\ (x \in X \setminus A)$ によって定める．次の問いに答えよ．
(1) 対応 $A \to \Phi_A$ によって，X のべき集合 $\mathcal{P}(X)$ と $E^X = \{f \mid f : X \to E \text{ 写像}\}$ の間に全単射が定めることを確認せよ．
(2) 写像 $1 - \Phi_A : X \to E$ を

$$(1 - \Phi_A)(x) = 1 - \Phi_A(x)\ (x \in X)$$

によって定める．$1 - \Phi_A$ に対応する X の部分集合は何か．
(3) A, B を X の部分集合とするとき，写像 $\min\{\Phi_A, \Phi_B\} : X \to E$ を

$$(\min\{\Phi_A, \Phi_B\})(x) = \min\{\Phi_A(x), \Phi_B(x)\}\ (x \in X)$$

によって定め，また，写像 $\max\{\Phi_A, \Phi_B\} : X \to E$ を

$$(\max\{\Phi_A, \Phi_B\})(x) = \max\{\Phi_A(x), \Phi_B(x)\}\ (x \in X)$$

によって定める．それぞれ $\min\{\Phi_A, \Phi_B\}, \max\{\Phi_A, \Phi_B\}$ に対応する X の部分集合は何か．

補充問題１０． 写像 $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ を，$n \in \mathbf{N}$（0 でない自然数）に対し，

$$f(n) := (n \text{ を 2 進法表示したときに現れる 1 の数}),$$

によって定める．たとえば，5 は２進法で表示すると “101” だから $f(5) = 2$ である．このとき，「任意の $p, q \in \mathbf{N}$ に対し，ある $n \in \mathbf{N}$ があって，$f(n) = p, n \geq q$」（つまり，全射であり，しかも，$f^{-1}(\{p\})$ が非有界）という条件が成り立つことを示せ．

補充問題１１． $X = \{A \mid A \text{ は } \mathbf{N} \text{ の有限部分集合}\}$ とおくとき，X が可算集合であることを示せ．

補充問題１２． $n \in \mathbf{N}$ とし，$X = \{1, 2, \ldots, n\}$ とする．次の問いに答えよ．
(1) X から X への全単射は，全部で何個あるか説明せよ．
(2) 全単射 $f : X \to X$ に対し，ある $m \in \mathbf{N}$ が存在して，$f^m = f \circ \cdots \circ f$（$m$ 個の合成）が恒等写像になることを示せ．

補充問題１３． $\mathbf{R}$ の閉区間の直積 $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ は，$\mathbf{R}^2$ の閉集合であることを証明せよ．

補充問題 その２ 基礎数学B

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (西暦２０１５年度後期)

補充問題１４. a, b を $\mathbf{R}^n$ の相異なる２点とするとき，$a \in U$, $b \in V$, $U \cap V = \emptyset$ となる $\mathbf{R}^n$ の開集合 U, V が存在することを示せ.

補充問題１５. $n \in \mathbf{N}$ とする．$A = (0,1) \cup (1,2) \cup \cdots \cup (n-1, n)$ の $\mathbf{R}$ における閉包 $\overline{A}$ を求めよ.

補充問題１６. $\mathbf{R}^n$ の部分集合 M に対し，$\overline{M} = ((M^c)^\circ)^c$ を示せ.

補充問題１７. $\mathbf{R}^n$ における３種類の距離関数 $d_1(x,y) = \|x-y\|, d_2(x,y) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|, d_3(x,y) = \sum_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$ について，次を示せ.
(1) 任意の $x, y \in \mathbf{R}^n$ について，$d_2(x,y) \le d_1(x,y) \le d_3(x,y) \le n d_2(x,y)$
(2) それぞれの距離関数が定める位相（開集合系）を，$\mathcal{O}_{d_1}, \mathcal{O}_{d_2}, \mathcal{O}_{d_3}$ とするとき，$\mathcal{O}_{d_1} = \mathcal{O}_{d_2} = \mathcal{O}_{d_3}$ を示せ.

補充問題１８. $\mathbf{R}^n$ の２点 x, y に対し，実数 $\rho(x,y) (\ge 0)$ が定められ，
(1) $\forall x, y \in \mathbf{R}^n, \rho(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = y$, かつ (2) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}^n, \rho(x,y) \le \rho(z,x) + \rho(z,y)$
が成り立つとき，ρ は，(3) $\forall x, y,\ \rho(x,y) = \rho(y,x)$ という性質も持つ（したがって，距離関数の定義をすべて満たす）ことを示せ.

補充問題１９. (X, d) を距離空間とするとき，次の問に答えよ.
(1) X の部分集合 U が開集合であるということの定義を述べよ.
(2) X の各点 x について，x を含む開集合の可算族 $\{U_m\}_{m \in \mathbf{N}}$ が存在し，x を含む任意の開集合 U に対し，ある $m \in \mathbf{N}$ があって，$U_m \subset U$ となることを示せ.（X は**第一可算公理を満たす**という.）
(3) X が稠密な可算部分集合をもつとする．このとき，X の開集合の可算族 $\{V_m\}_{m \in \mathbf{N}}$ が存在し，X の任意の開集合 U に対し，$\Gamma \subset \mathbf{N}$ があって，$U = \cup_{m \in \Gamma} U_m$ となることを示せ.（X は**第二可算公理を満たす**という.）
(4) 相異なる２点 $x, y \in X$ に対し，開集合 U, V が存在し，$x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$ となることを示せ.（X は **Hausdorff 空間である**という.）（ヒント：異なる２点 $x, y \in X$ について，$d(x,y) > 0$ である．）

補充問題２０. 距離空間 $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ に対し，$X = X_1 \times X_2$ 上の関数 d, d' をそれぞれ

$$d(x,y) := \sqrt{d_1(x_1,y_1)^2 + d_2(x_2,y_2)^2}, \quad d'(x.y) := d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$$

$(x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X)$ によって定める．次の問いに答えよ.
(1) $d : X \times X \to \mathbf{R}$ は X 上の距離関数であることを示せ.
(2) $d' : X \times X \to \mathbf{R}$ は X 上の距離関数であることを示せ.
(3) ２つの距離空間 (X, d) と (X, d') について，恒等写像 $f = \mathrm{id}_X : (X, d) \to (X, d')$ は連続写像であることを示せ.

補充問題２１． (X,d) を距離空間，$A \subset X$ とする．A が**全有界**とは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，有限個の点 $a_1, \dots, a_p \in A$ が存在して，$A \subset B(a_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(a_p, \varepsilon)$ が成り立つときに言う．A が全有界のとき，A の可算部分集合 $S = \{a_m \mid m \in \mathbf{N}\}$ があって，$\overline{S} \supset A$ が成り立つことを示せ．

補充問題２２． (X,d) を距離空間，$x \in X$ と $A(\neq \emptyset) \subset X$ に対し，$d(x,A) = \inf\{d(x,y) \mid y \in A\}$ と定める．このとき次の問いに答えよ．

(1) 任意の $x, x' \in X$，$a \in A$ に対し $d(x,A) - d(x,x') \leq d(x',a)$ となることを示せ．

(2) 写像 $f : X \to \mathbf{R}$ を $f(x) := d(x,A) \in \mathbf{R}, (x \in X)$, で定めるとき，$f$ が連続であることを示せ．

補充問題２３． $\mathbf{R}^n$ の部分集合 A が点列コンパクトであるための必要十分条件は，A が有界閉集合であることを示せ．

補充問題２４． $\mathbf{R}^n$ の点列 $x(1), x(2), x(3), \dots$ が条件

$$|x(\ell) - x(m)| \geq 1 \ (\ell > m \geq 1)$$

を満たすとする．このとき，$\lim_{m \to \infty} |x(m)| = \infty$ を示せ．

補充問題２５． $(X,d), (Y,d')$ を距離空間，$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_m \supset \cdots$ を X の点列コンパクト集合 A_m からなる列とする．$f : X \to Y$ を連続写像とするとき，

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} f(A_m) = f\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\right)$$

が成り立つことを示せ．

補充問題２６． 次の問いに答えよ．

(1) 距離空間 (X,d) が**完備**であるという定義を述べよ．

(2) 距離空間 (X,d) の部分集合 A について，次の条件 (a) (b) は互いに同値であることを証明せよ．

(a) A は X の閉集合である.（つまり，$X \setminus A$ が X の開集合である.）

(b) A の点列 $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ の極限は A に属する．

(3) 完備な距離空間 (X,d) の部分距離空間 A が完備であるための必要十分条件は A が X の閉集合であることである．このことを証明せよ．

補充問題２７．

$$X = \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R}) := \{(x_k)_{k=1}^{\infty} \mid x_k \in \mathbf{R} \ (k \in \mathbf{N}),\ \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \ \text{が有限値として定まる}\}$$

とおき，X 上に距離を

$$d\left((x_k)_{k=1}^{\infty},\ (y_k)_{k=1}^{\infty}\right) := \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2}$$

によって定義する．距離空間 (X,d) が完備であることを示せ．

補充問題２８． X, Y を距離空間とし，X は点列コンパクトと仮定する．このとき，任意の連続写像 $f : X \to Y$ は**一様連続**であることを示せ．